Onder de loep

Verrijkende activiteiten in de eerste graad

Hilde Eggermont, Luc Van den Broeck, Michel Roelens, Gilberte Verbeeck

Inhoud

1. Inleiding

De eerste graad is voor de leerlingen wennen aan een nieuwe wereld, met verschillende vakleerkrachten in plaats van één juf of meester. Dit is voor sommigen een hele aanpassing. De leerlingen komen uit verschillende lagere scholen. Het niveau, zowel voor taal als voor wiskunde, is soms heel uiteenlopend en de klassen zijn meestal heterogeen samengesteld. Bovendien hebben de leerlingen in verschillende lagere scholen de leerstof niet op dezelfde manier gekregen. Daarom wordt een deel van de leerstof van de lagere school hernomen, zodat de violen gelijk gestemd zijn. Bij de laatste leerplanwijziging werd de aansluiting bij de beginsituatie vanuit de lagere school extra in de verf gezet.

Uit gesprekken met leerlingen en collega's uit de eerste graad komen twee problemen naar voren. Voor veel leerlingen komt de leerstof van het eerste jaar voor een groot deel over als herhaling. Leerlingen die deze leerstof al beheersen, hebben soms de indruk tijd te verliezen en weinig nieuws te leren. Ze hadden grote verwachtingen, ook op vlak van wiskunde, over de 'grote school' en zijn een beetje teleurgesteld, zeker als de leerkracht zich beperkt tot leerstofonderdelen en oefeningen die voor iedereen haalbaar zijn.

Een tweede probleem dat uit deze gesprekken naar voren komt, betreft de werkvormen. Op het einde van de lagere school hebben leerlingen geleerd om zelfstandig te werken. Ze zijn vertrouwd met hoekenwerk en groepswerk. In veel secundaire scholen wordt hierop verdergegaan, maar het komt ook voor dat er op vlak van zelfstandige werkvormen een beetje gas wordt teruggenomen. Ook dit heeft te maken met de verschillende beginsituatie en het gelijkstemmen van violen.

Veel leerkrachten van de eerste graad doen iets aan deze twee problemen. In samenwerking met collega's of op eigen houtje bedenken ze verrijkende activiteiten waarmee leerlingen van de eerste graad nog beter de boeiende wereld van de wiskunde en haar toepassingen ontdekken. Ze proberen een haalbaar systeem uit te werken waarbij de ene leerling extra wordt uitgedaagd en waarbij de andere leerling minder kans maakt om af te haken. Ze breiden de leerstof uit met verrassende problemen of contexten. Ze geven de leerlingen zelfs de kans om korte wiskundige presentaties te geven. Aan leerlingen met een grotere wiskundehonger leggen ze gekruide problemen voor. Leerlingen met een mindere aanleg voor wiskunde vinden die problemen leuk maar hoeven er verder niets mee te doen.

Leerlingen met meer wiskundetalent kunnen er nadien nog naar hartenlust over doorbomen.

In deze loep willen we enkele van deze leerkrachten het woord geven zodat ze anderen kunnen inspireren. We hebben enkele collega's en een oud-collega geïnterviewd en we hopen dat hun verhaal herkenbaar is, en/of inspirerend en aanstekelijk werkt. Uiteraard moet je niets 'overnemen'; wat bij hun leerlingen werkt, werkt misschien niet bij die van jou. Maar het kan je op ideeën brengen om voor jouw leerlingen de lessen nog te verrijken.

We streven zeker geen volledigheid na; het zijn gewoon enkele verhalen uit de praktijk. Oorspronkelijk wilden we vier of vijf bijdragen verzamelen, maar door tijdsgebrek en een paar interview-afspraken die afgezegd zijn, is het aantal bijdragen beperkt gebleven tot drie. Het is dus maar een eerste aanzet.

Lezer die enkel in de tweede of derde graad lesgeeft, geef je deze loep ook eens door aan je collega's van de eerste graad als die (nog?) niet geabonneerd zijn? Of neem van hen een kort interview af over hun manier om de lessen nog meer te verrijken. Stuur het ons door en misschien publiceren we het in Uitwiskeling of op onze website www.uitwiskeling.be, als vervolg op deze loep.

2. Inspirerende verhalen

Een eerste collega die we aan het woord laten in deze loep, is Etienne Steyaert. Doorheen zijn lange carrière heeft Etienne les gegeven in ongeveer alle jaren van het secundair onderwijs, niet alleen in wiskunde maar ook in fysica en wetenschappelijk tekenen. Dit laatste vak, dat momenteel in het aso uitgestorven is, verraadt dat Etienne al een jaartje ouder is.

Toen hij directeur was van een secundaire school in Oostakker, nam Etienne zoveel mogelijk lessen over van afwezige leerkrachten en probeerde hij leerlingen binnen een tijdsbestek van 50 minuten een wiskundige boodschap of een uitdaging mee te geven. De tijd om de leerlingen warm te maken voor een ongekend stukje wiskunde en hen te overtuigen hierover verder na te denken, was dus telkens beperkt. Binnen één lesuur moest het gebeuren. Om de les te laten aanslaan, moest ze niet alleen mentaal goed voorbereid zijn maar moest er ook handig kunnen ingespeeld worden op dwaalredeneringen van leerlingen.

Etienne heeft een rijk arsenaal aan demonstratielessen verzameld. Hij heeft voor alle jaren en voor de meest uiteenlopende thema's wel iets in petto. Daarom heb ik hem gevraagd mee te werken aan deze loep en de kruiden en specerijen die hij gebruikte in zijn lessen voor de eerste graad te beschrijven.

De onderwerpen die in deze paragraaf aan bod komen, sensibiliseren de leerlingen voor getalgevoeligheid en voor woordgevoeligheid, geven de leerlingen inzicht in de noodzaak van algebra en algebraïsch rekenwerk en wakkeren het ruimtelijk inzicht van leerlingen aan. De aangesneden onderwerpen zijn niet rechtstreeks te vinden in de leerplannen wiskunde. Hier moeten we ons als wiskundeleerkracht af en toe over durven zetten.

Na deze kennismaking laten we Etienne zelf aan het woord.

2.1. Woordgevoeligheid

Taalgevoeligheid is erg belangrijk voor het kunnen begrijpen van de wiskunde. Het verschil tussen bijvoorbeeld 'de zijden van de driehoeken zijn gelijk' en 'de overeenkomstige zijden van de driehoeken zijn gelijk' is subtiel maar het is cruciaal bij het leerstofonderdeel van congruente driehoeken. Het is eveneens belangrijk dat de leerlingen het verschil aanvoelen tussen de uitspraak 'als de vierhoek een ruit is, dan staan de diagonalen loodrecht op elkaar' en 'als de diagonalen loodrecht op elkaar staan, dan is de vierhoek een ruit'. De samenhang begrijpen tussen woorden en tussen zinnen moet dus van kindsbeen af getraind worden.

Naast deze taalgevoeligheid, vind ik ook de *woordgevoeligheid* belangrijk, ook bij jonge leerlingen. Daarom vraag ik hen wel eens wat het woord 'wiskunde' betekent. Als er woordenboeken in de klas liggen, laat ik de leerlingen het woord 'wis' opzoeken en samenstellingen en uitdrukkingen met 'wis' (in dezelfde betekenis). Volgens van Dale betekent 'wis' in de eerste betekenis 'zeker', 'stellig', 'precies' en 'secuur'. (In de tweede betekenis is het een twijg, een teen of takje.) Wiskunde gaat dus over de 'kunde' van wat 'zeker' is. Samenstellingen en uitdrukkingen die dezelfde stam bevatten, zijn 'wis en zeker', 'wis en waarachtig', 'het ongewisse', 'gewis'... Deze uitdrukkingen blijken alleen nog gekend te zijn bij leerlingen met een grote woordenschat.

Figuur 1 Simon Stevin (foto: Ad Meskens)

Vroeger sprak men over ‘mathematica’ in plaats van over wiskunde maar rond de jaren 1600 probeerde de Bruggeling Simon Stevin het Latijn als wetenschapstaal te vervangen door het Nederlands. Eenmaal de naam van Simon Stevin is gevallen, kan ik het niet nalaten om de klas te vertellen dat het aan deze wetenschapper te danken is dat we met decimale getallen werken. In 1585 publiceerde Simon Stevin zijn boek ‘De Thiende’ waarin hij een lans brak voor het werken met ‘een soort van kommagetallen’, met tienden, honderdsten en duizendsten. De leerlingen schrikken er wel van dat de decimale getallen pas enkele eeuwen geleden algemeen in gebruik zijn geraakt.

Om deze korte inleiding rond Stevin af te ronden, geef ik een aantal andere Nederlandstalige termen die Simon Stevin bedacht. Ik vraag de leerlingen in een losse quiz naar de betekenis van deze woorden en eventueel ook naar de vroegere Latijnse benaming. In Latijnse klassen wordt dit wel gesmaakt.

- *Evenwijdig* (in de tijd van Stevin gespeld als evenwijdich) zegt men van rechten die overal even wijd van elkaar liggen. Eertijds noemde men deze rechten *parallel*.
- *Meetkunde* (bij Stevin: meetconst) is de kunst van het meten. In de klassieke geschriften sprak men van *geometrie*. Hierin herken je de *geo* van geograaf en geologie. Oorspronkelijk hield de meetkunde zich dus enkel bezig met het berekenen van afstanden op aarde. Het was dus een praktische wetenschap.
- De *middellijn* van een cirkel is de lijn die door het *middelpunt* van een cirkel loopt. De *raaklijn* is de lijn die aan de cirkel raakt. De vroegere benamingen van deze lijnen waren *diameter* en *tangens*.

2.2. Getalgevoeligheid

Getalgevoeligheid krijg je door meer aan hoofdrekenen en aan schattend rekenen te doen. Niet dat het werken met een zakrekenmachine niet zinvol is. Maar de zakrekenmachine aan de kant laten, vind ik vaak even zinvol.

Een miljard seconden

Om de leerlingen te dwingen aan hoofdrekenen te doen, om ze bewust te laten werken met benaderingen en om ze gevoelig te maken voor grote getallen, vraag ik hen wel eens wie er één miljard seconden oud is. Geen van de leerlingen

durft hierbij de hand opsteken. Daarna rekenen we het samen uit. Uiteraard zonder zakrekenmachine.

Er gaan 3 600 seconden in een uur. Als je het aantal seconden in een dag wil weten dan moet je vermenigvuldigen met 24 maar vermenigvuldigen met 25 is makkelijker (vermenigvuldig met 100 en deel door 4). We vinden als benadering 90 000 seconden in een dag. Dat is iets te veel. Maar we kunnen compenseren door een jaar te nemen met 350 dagen in plaats van eentje met 365 dagen. Om 350 met 90 000 te vermenigvuldigen moeten we 9 met 35 vermenigvuldigen (dat is 315) en hier vijf nullen achter kleven. Dat geeft 31 500 000. De laatste stap is de moeilijkste. Willen we weten hoeveel keer 31 500 000 in 1 000 000 000 gaat dan is dit net evenveel als het aantal keer dat 31,5 in 1 000 gaat. En dat is ongeveer 32 keer. Iemand van 32 jaar is dus ongeveer 1 miljard seconden oud.

Zelf ben ik al 2,3 miljard seconden oud. Leerlingen die er wat voor over hebben, kunnen mijn leeftijd met een kleine berekening achterhalen.

De legende van het schaakbord

Een ander probleem waarmee ik de leerlingen leer rekenen met grote getallen (en de gepaste afrondingen leer maken) is het probleem van de graankorrels. Dit probleem kan ook gebruikt worden om de machtsverheffing in te leiden.

Figuur 2 Het schaakbord

Een legende vertelt dat het schaakbord ongeveer 1500 jaar geleden door Sissa Ben Dahir in India is uitgevonden. Zijn schaakbord was een vierkant bord met 64 velden waarop twee legers van verschillende kleur een inventieve veldslag moesten uitvechten. Elk stuk (toren, paard, loper, pion, koning en koningin) had een eigen manier van voortbewegen en dit maakte het interessant om een strategisch plan uit te denken om elkaar te belagen.

Sissa toonde zijn spel aan de koning en die was zodanig onder de indruk dat hij het wilde kopen. De wijze uitvinder wilde niet hebberig overkomen en vroeg één graankorrel als prijs voor het eerste veld op het schaakbord, twee korrels voor het tweede veld, vier korrels voor het derde veld enzoverder tot het 64ste veld. De koning was aanvankelijk beledigd omdat de wijze monnik maar een habbekrats vroeg als verkoopprijs voor dit lumineuze spel. Maar toen hij, na de koopbelofte te hebben aangenomen, zijn boekhouder raadpleegde, bleek die niet zo gelukkig te zijn met deze overeenkomst.

Na dit korte verhaal laat ik de leerlingen raden welke koopprijs de koning moest ophoesten voor de aankoop van het schaakbord. De antwoorden variëren van ‘enkele zakken’ en ‘enkele schuren’ tot ‘de hele graanoogst van India van een heel jaar’.

Sommige leerlingen beseffen dat ze eerst naar een klein aantal velden moeten kijken om daarna een veralgemening te maken. Voor bijvoorbeeld 5 velden volstaat het om $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$ graankorrels te betalen. Voor 6 velden moeten er $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$ graankorrels neergeteld worden. Deze getallen vertonen een regelmaat die door leerlingen gelinkt wordt aan de machten van 2. Voor 5 velden betaalt de koning $2^5 - 1$ graankorrels, voor 6 velden betaalt hij $2^6 - 1$ korrels. Wanneer ik de klas vraag hoeveel hij voor 10 velden betaalt, kunnen de meeste leerlingen wel bij het getal 1 023 komen. We rekenen dit na en dreunen samen de machten van 2 op: $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1\,024$. Tegelijkertijd laat ik met mijn handen zien bij welke macht van 2 we gekomen zijn.

Ik stel voor om 1 023 naar beneden af te ronden tot 1 000. We hebben dan iets te weinig betaald maar het is in Oosterse landen ook niet ongewoon om af te dingen, vooral bij een grote aankoop (zoals die van de tien eerste velden van een schaakbord).

Mijn volgende vraag is hoeveel graankorrels de koning afgerond zou moeten betalen voor 20 velden. Hier komt meestal heel snel het antwoord 2 000. Leerlingen die nog niet helemaal vertrouwd zijn met machten (en met exponentiële groei) vinden dat voor een dubbele aankoop het dubbele van de prijs zou moeten neergeteld worden. Spoedig echter komen bepaalde leerlingen er achter dat het groeiproces zich herhaalt: voor 11 velden betaalt de koning 2 000 korrels, voor 12 velden betaalt hij 4 000 korrels, voor 13 velden betaalt hij 8 000 korrels en ... voor 20 velden betaalt hij 1 024 000, of afgerond 1 000 000 korrels. Deze reductieprijs, een 1 met zes nulletjes erachter, kan ook geschreven worden als 10^6.

Enkele leerlingen hebben dan geen tussenstappen meer nodig om het uiteindelijke antwoord $16 \cdot 10^{18}$, te kunnen vinden. Aan de andere leerlingen vraag ik hoeveel de koning benaderend zou moeten betalen voor 30 velden, voor 40 velden, voor 50 velden en voor 60 velden. Daarna moet er nog 4 keer verdubbeld worden. Dit brengt de uiteindelijke prijs op een getal met 19 cijfers.

Voor de les begon heb ik de exacte prijs, $2^{64} - 1$, als een getal van 20 cijfers

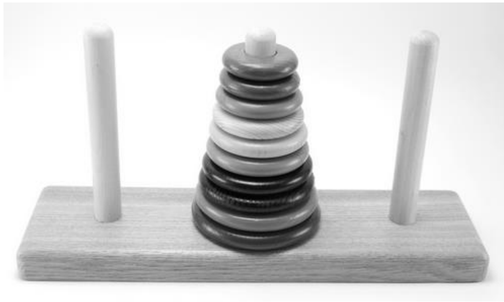
$$18446744073709551615$$

met alcoholstift uitgeschreven op een lint van A3-vellen die ik als een harmonica aan elkaar vastgemaakt heb. Als ik de harmonica uitvouw zijn de leerlingen onder de indruk maar weten ze nog helemaal niet hoe ze dit getal moeten interpreteren.

Ik vertel de leerlingen tot slot dat de wereldgraanproductie voor het jaar 2016 geraamd wordt op $2 \cdot 10^9$ ton (1500 jaar geleden was dat uiteraard veel minder), dat 1 ton gelijk is aan 10^3 kg en dat 1 kg graan ongeveer $15 \cdot 10^6$ korrels bevat. De rest van de berekening laat ik wijselijk aan de leerlingen over.

De torens van Hanoi

Soms vervang ik het verhaal van het schaakbord door de legende van de torens van Hanoi. Hier gaat het immers ook over het schatten van het getal $2^{64} - 1$. De manier van schatten van dit getal blijft dezelfde als in het vorige verhaal. Ik beperk me in dit deel van de loep dus tot het vertellen van de legende.



Figuur 3 De torens van Hanoi

Volgens een overlevering uit het oude India stond er in Benares een Hindoetempel met een toren van 64 opeengestapelde schijven. Deze schijven waren van groot naar klein geordend. De Brahmaanse priesters hadden de opdracht om deze toren te verplaatsen. Hiervoor hadden ze drie stapelplaatsen ter beschikking. Per seconde kon er één schijf verplaatst worden. Er was hierbij echter een heilige regel die moest gerespecteerd worden: een grotere schijf mocht nooit bovenop een kleinere schijf liggen. Er mocht ook geen vierde stapelplaats in gebruik genomen worden. De priesters waren ervan overtuigd dat de wereld zou vergaan op het moment dat de hele toren aan schijven verhuisd zou zijn.

De Franse wiskundige Edouard Lucas maakte een spel van deze legende. Hij verwees echter naar een tempel in Hanoi, de hoofdstad van Vietnam. Ik ben zelf in het bezit van een speelgoedversie van de torens van Hanoi, zij het met slechts zes schijven. Hierop kan ik laten zien hoe het verplaatsen van de schijven in zijn werk gaat. Eens je door hebt hoe je deze torens zo handig mogelijk verplaatst, gaat dit vrij vlot. Ik laat de klas zien dat ik voor deze torens $2^6 - 1 = 63$ zetten nodig heb.

Om je op het slot van deze les voor te bereiden, moet je als leerkracht toch even wat narekenen. Je vraagt je nu wellicht af of het verplaatsen van

de echte toren kan uitgevoerd worden vooraleer de aarde is vergaan.

Uit het voorgaande heb je onthouden dat $2^{64} - 1$ een getal is van 20 cijfers en dat 10^9 seconden gelijk zijn aan iets meer dan 32 jaar. Je komt ongeveer aan 0,6 biljoen jaar.

Het precieze tijdstip van de ondergang van de aarde is uiteraard niet gekend. Volgens de Maya's zou dit in december 2012 geweest zijn. Maar moderne astronomen menen dat de zon over 4 miljard jaar in een rode reus zal veranderen die de aarde verschroeit tot een vurige bol lava en haar daarna verslindt.

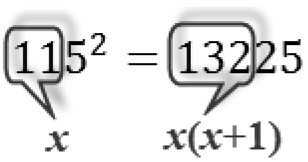
2.3. Inzicht in de noodzaak van algebra(ïsch rekenen)

In de lagere school moeten leerlingen niet met letters rekenen. Pas in het middelbaar komt het letterrekenen mondjesmaat binnen. De vraagstukken, die de noodzaak van het werken met onbekenden en met vergelijkingen moeten illustreren, kunnen vaak ook zonder letterrekenen opgelost worden. Ik zocht daarom naar enkele verrassende maar ook wel eenvoudige toepassingen waarbij het rekenen met letters bijna onvermijdelijk is.

Kwadraten van getallen eindigend op 5

Snelrekenaars hebben soms verrassend eenvoudige trucjes. Eentje ervan is het berekenen van een kwadraat van een getal dat eindigt op een 5. Ik vraag aan een leerling een getal te noemen, eindigend op 5. Hij kiest 115. Ik schrijf meteen het kwadraat op. Dit blijkt te kloppen met wat de zakrekenmachine eventjes later vertelt.

Ik laat de leerlingen raden naar de rekentechniek die ik gebruikte. Pas daarna verklap ik mijn truc door het volgende schema op het bord te zetten. Gelukkig geloven de meeste leerlingen deze truc niet. Ze willen hem ook voor andere voorbeelden narekenen.



Figuur4 Bordschema voor rekentruc

Na enkele bijkomende voorbeelden zijn de leerlingen wel overtuigd van de geldigheid van de rekentruc. Ik waarschuw hen dat dit soort van lichtgelovigheid wel eens gevaarlijk kan zijn in de wiskunde. Er zijn genoeg verhalen gekend van wiskundige regels die voor kleine getalletjes kloppen maar voor iets grotere getallen fout aflopen. Er is dus een algemeen bewijs nodig. Eentje met letters. We vertrekken van een getal van de vorm $10x + 5$ waarbij x een willekeurig natuurlijk getal is. In het schema hierboven was x gelijk aan 11.

Vervolgens bouwen we samen een bewijs op. Naargelang de leerlingen vertrouwd zijn met merkwaardige producten, probeer ik deze producten expliciet te gebruiken of expliciet te vermijden. We zoeken bij elke stap een gepaste verklaring. Samengevat komt het bewijs neer op de volgende berekening:

$$\begin{aligned}(10x+5)^2 &= (10x+5)(10x+5)\\ &= 100x^2 + 50x + 50x + 25\\ &= 100x^2 + (50x + 50x) + 25\\ &= 100x^2 + 100x + 25\\ &= (100x^2 + 100x) + 25\\ &= 100(x^2 + x) + 25\\ &= 100x(x+1) + 25\end{aligned}$$

Nu pas kunnen we er op vertrouwen dat de rekentruc correct is, dat hij wis en waarachtig is. Ik vind het zelf belangrijk de noodzaak van bewijzen al op vroege leeftijd aan te brengen. Dit is immers de essentie van 'wis'kunde.

Som van rijtje van 6 getallen

Een andere goocheltruc, die nogal eens verbazing wekt, heeft te maken met de rij van Fibonacci. Ik vraag een leerling uit de klas naar twee opeenvolgende gehele getallen. Deze getallen vormen het begin van een rijtje van zes getallen die aan de eigenschap van Fibonacci voldoen: elk getal is de som van de twee voorgangers. Hoewel de getallen in deze rij groot kunnen zijn, kan ik deze zes getallen zonder tijdverlet optellen, binnen de seconde dus.

Ik geef hiervan een voorbeeld. De getallen die op het bord verschijnen zijn: 33, 34, 67, 101, 168 en 269. Zonder nadenken worden deze getallen gesommeerd tot 672.

Jonge leerlingen kunnen vaak enthousiast zijn in hun drang de regelmaat achter deze sommatie te ontdekken. Na enkele voorbeelden met zeer grote getallen, hebben ze vaak wel door dat de som gelijk is aan het derde getal van de rij waarachter het cijfer 2 geplaatst wordt.

Ditmaal hebben de leerlingen zelf wel door dat er een algemeen bewijs voor deze bewering nodig is. Het bewijs is van dezelfde moeilijkheidsgraad als het vorige. Als je start met de getallen x en $x + 1$ is er ook maar één variabele nodig. Ik geef er de voorkeur aan dit bewijs niet in de klas uit te werken. Het is een goede uitdaging voor leerlingen die ondertussen gemotiveerd geraakt zijn voor bewijsvoering.

2.4. Meetkundig inzicht

Meetkunde of geometrie was in het oude Griekse rijk aanvankelijk de wetenschap die zich bezig hield met het meten van de aarde (geo betekent aarde). Bij de oude Egyptenaren moesten de vruchtbare gronden aan de oevers van de Nijl elk jaar opnieuw opgemeten en verkaveld worden na de overstroming van de rivier. Bekend zijn de fresco's uit de graftombes van Thebe, waarin de landmeters (of harpedonapten) in actie zijn met hun meettouwen. Terloops (en ook als voorbereiding op een latere oefening) vertel ik dat men vermoedt dat de landmeters hoeken konden uitzetten met hun touwen die met knopen in twaalf gelijke delen waren onderverdeeld. Als zulk touw in een driehoek gelegd werd met zijden 3, 4 en 5 dan ontstond de rechte hoek als vanzelf.

Figuur 5 Harpedonapten in het oude Egypte

Later evolueerde deze praktische kennis van de landmeting naar een theoretische wetenschap die zich bezig hield met het onderzoek van eigenschappen van vlakke figuren en ook van ruimtelijke lichamen.

Als aanknopingspunt met de oorspronkelijke 'geo'metrie, leg ik de leerlingen het probleem voor van de afstandsberekening op de aardbol. Het is mijn bedoeling de leerlingen aan te zetten tot het oplossen van problemen met ruimtelijk inzicht, dit in aanvulling op de verplichte oefeningen met aanzichten van stapels blokken, die in de eerste graad aan bod komen.

In een eerste probleem meten we op een boloppervlak, daarna op een kubus en tot slot volgt er een vlak meet(kunde)probleem.

Afstanden op een bol

Onlangs kocht ik in een tuincentrum een piepschuim bol, die bedoeld was als ondergrond voor het bloemschikken. De bol bestond uit twee delen die met een dubbele rand in elkaar klikten. Toen ik de bol in de winkel zag liggen, wist ik meteen dat ik hem kon gebruiken in de wiskundeles.

Figuur 6 Piepschuim bollen uit een tuincentrum

Als ik de naad in het midden als een evenaar met een alcoholstift of een plaklint zou accentueren, had ik een perfecte replica-aardbol op schaal 1/25 000 000. Om hem gebruiksklaar te maken voor de les, moest ik alleen nog de noord- en de zuidpool aanduiden en enkele steden waartussen ik de afstand wou berekenen. Ik koos voor Nairobi (de hoofdstad van Kenia, ongeveer op de evenaar gelegen), Singapore (een stadstaat bij Maleisië, ook op de evenaar gelegen), Parijs (de hoofdstad van Frankrijk, op 49 graden noorderbreedte) en Vancouver (in Canada, ook op 49 graden noorderbreedte).

De eerste vraag die ik aan de klas stel, gaat over de afstand in vogelvlucht tussen Nairobi en Singapore. Ik moet het begrip 'vogelvlucht' verklaren. Met deze afstand bedoel ik de lengte van de kortste reisweg die over het aardoppervlak scheert (niet de reisweg van een mol dus). Geen enkele leerling twijfelt bij deze vraag aan de oplossing: de kortste reisweg loopt over de evenaar. Over de techniek om de afstand tussen Nairobi en Singapore te achterhalen is er geen discussie: span een touwtje over de evenaar tussen deze twee steden, meet dit touwtje en vermenigvuldig deze lengte met de schaalfactor (1/25 000 000).

Bij de afstand van Parijs naar Vancouver loopt het minder vlot. Sommige leerlingen vinden dat er 'zo recht mogelijk' moet gereisd worden. Als ik dieper doorvraag naar de betekenis van 'zo recht mogelijk', antwoorden ze dat de baan evenwijdig moet zijn met de evenaar. Ik neem een touwtje, leg het over de 49ste breedtecirkel van Parijs naar Vancouver. Het blijkt nogal slapjes rond de piepschuim bol te hangen. Als ik het echter aanspan, komt het touwtje halverwege Parijs en Vancouver verraderlijk dicht bij de noordpoolstip.

Dit zet de leerlingen aan het denken. De baan die door het aangespannen touwtje in beeld komt, laat zich niet zo makkelijk omschrijven met de gekende begrippen breedtecirkel, meridiaan en evenaar.

Figuur 7 Kortste route tussen Parijs en Vancouver

Ik moet dus een handje helpen. Uit mijn boekentas neem ik een handzaag waarmee ik de bol dreig door te zagen, precies over de kortste reisroute. Na deze bedreiging gaat er bij sommige leerlingen een lichtje branden. De kortste reisroute over een bol wordt als volgt getypeerd: als je de bol doorzaagt over de kortste route tussen twee steden dan valt hij precies uiteen in twee gelijke delen. Het snijvlak gaat met andere woorden door het middelpunt van de bol. Bewezen is deze eigenschap nog niet, maar ze is met dit voorbeeld wel zeer aanvaardbaar gemaakt.

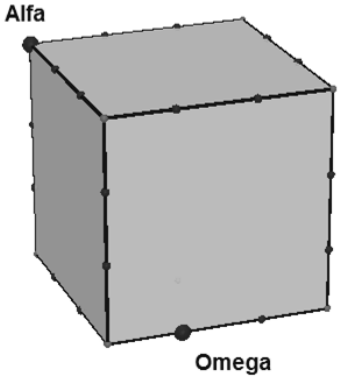
Hoe de afstand verder bepaald wordt? Precies zoals bij twee punten op de evenaar. Meet het touwtje dat strak gespannen werd tussen Parijs en Vancouver en vermenigvuldig deze lengte met de schaalfactor.

Nog even probeer ik van de gelegenheid gebruik te maken om uit te leggen dat ook voor het bepalen van de kortste vliegroutes tussen twee steden wiskundig inzicht niet kan ontbreken. De vliegroute van Parijs naar Vancouver loopt noordelijker dan je zou verwachten. Op een computersimulatie (zie figuur 7) kun je zien dat er zelfs een tipje van Groenland wordt afgesneden.

Afstanden op een kubus

In een volgende fase verander ik de vorm van de aarde in een kubus. Deze situatie is niet erg realistisch maar ze is wiskundig wel interessant.

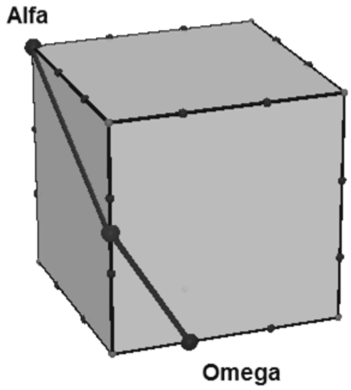
Ook van deze aarde heb ik een schaalmodel bij, eentje met ribben van 3 dm. Ik duid twee steden op mijn kartonnen kubus aan: Alfa ligt op een hoekpunt en Omega ligt op één van de ribben op 1 dm van een hoekpunt. (zie figuur 8).



Figuur 8 De steden Alfa en Omega op een kubusvormige planeet

Als ik de leerlingen nu vraag om de weg van Alfa naar Omega te beschrijven die de kortste vogelvluchtafstand heeft, is er grote onenigheid. De ene leerling zegt: ga eerst over de ribbe naar het voorvlak en daarna in rechte lijn naar Omega. Een andere denkt: eerst in rechte lijn over het zijvlak naar het midden van de opstaande ribbe en dan in rechte lijn naar Omega. Nog een andere...

Ik besluit om het trucje met het gespannen touw nog een keer toe te passen. De kortste baan van Alfa naar Omega bestaat inderdaad uit een aaneenschakeling van twee lijnstukken met een knik in de opstaande ribbe linksvoor. Maar geen van de leerlingen lijkt de juiste omschrijving gegeven te hebben van de positie van het knikpunt.



Figuur 9 Slechte gok: niet helemaal de kortste baan

Ik voel dat ik weer een handje moet toesteken om een omschrijving te geven van de kortste route. Een van de leerlingen kijkt angstvallig naar de handzaag die nog op de lessenaar ligt. Maar ik stel hem gerust. Ditmaal wil ik de aardbol op een grondigere manier verwoesten.

Omdat mijn kubus maar op een klungelige manier vanuit een ontvouwing in elkaar is geplooid, merken de leerlingen wel dat hij nu gewoon moet open geplooid worden. Bij het openvouwen blijft de lengte van het gespannen touwtje immers bewaard.

Ik stel voor dat iedereen een ontvouwing van de kubus op een ruitjesblad tekent, dat de steden Alfa en Omega hierop aangeduid worden, dat daarna het kortste pad tussen deze steden getekend en nagemeten wordt en dat deze afstand tot slot weer herschaald wordt tot op ware grootte (nl. een ribbe van 3 dm).

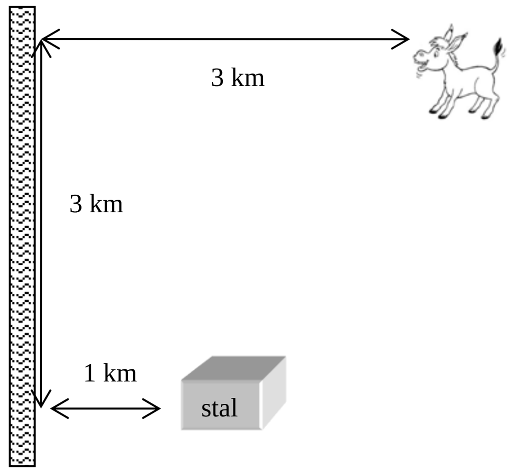
Voor deze opdracht is wel wat meetkundig inzicht nodig: ontvouwingen maken, het overbrengen van punten en afstanden vanuit een 3D-situatie naar een 2D-situatie, herschalen met evenredigheden... De meeste leerlingen beseffen dat de kortste weg tussen twee steden in een vlakke ontvouwing gegeven wordt door een lijnstuk. Maar weinigen beseffen dat ze dit lijnstuk niet echt hoeven te meten. Als ze goed naar de ontvouwing kijken, zien ze een rechthoekige driehoek waarvan de schuine zijde de gevraagde reisroute is. De rechthoekszijden zijn 3 dm en 4 dm. Wie zich nog goed de inleiding van de Egyptische harpedonapten herinnert, kan zonder meten besluiten dat de kortste afstand tussen Alfa en Omega 5 dm is.

Afstanden in een vlak

Kortste afstanden berekenen in een vlak lijkt makkelijker te zijn dan in de ruimte. Dat komt uiteraard omdat er in de ruimte beperkingen zijn waar je je moet aan houden. Je mag bijvoorbeeld geen gangen door de aarde maken om twee steden te verbinden. Maar wat gebeurt er als we ook in het vlak bepaalde beperkingen invoeren voor de reiswegen?

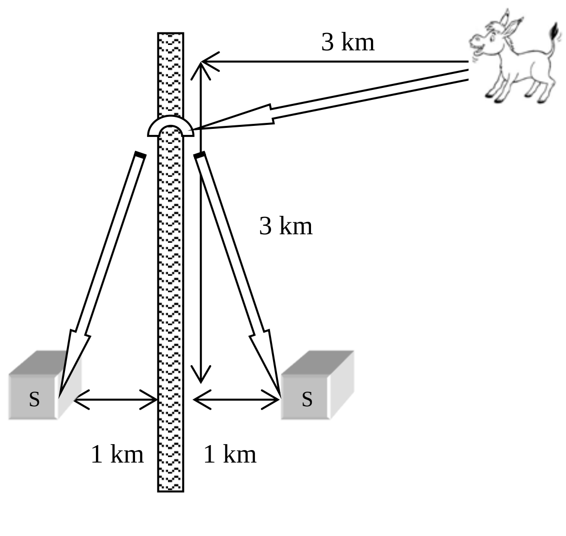
Stel je voor dat je dagelijks met je ezeltje van de weide naar de stal moet. Maar ondertussen moet je lastdier ergens aan de rivier drinken. Je kunt dus niet in een rechte baan van de weide naar de stal.

Ik beweer dat er ergens een drenkplaats bestaat waarvoor het ezeltje niet meer dan 5 km zal moeten stappen. Maar om dit in te zien, is er een ezelsbrugje nodig. Omdat taal mijn stokpaardje is, vraag ik de leerlingen of ze weten wat een ezelsbrugje is. Uiteraard is het een brugje waar een ezel kan over stappen. Zo heb ik het ook bedoeld. Maar in een figuurlijke betekenis is het een methode om minder slimme personen tot een oplossing van een probleem te brengen. Mocht ik deze les in een derde jaar geven dan zou ik zeker nog vermelden dat 'het ezelsbrugje' in mijn jeugd synoniem was van 'de stelling van Pythagoras'.



Figuur 10 Van de weide naar de stal

Om me te verduidelijken maak ik een schets op het bord. Ik werp ergens willekeurig een ezelsbrug over de rivier. Dan duid ik het ezelspad aan: een gebroken weg die uit twee lijnstukken bestaat. De leerlingen vragen waarvoor de brug moet dienen. De ezel komt immers alleen maar zijn dorst lessen aan de rivier en heeft hier geen brug voor nodig. Ik antwoord dat het handiger is voor de ezeldrijver om zijn stal te verhuizen naar de andere kant van de rivier en teken meteen ook een gespiegelde stal op 1 km van de rivier. Voor de ezel maakt dit niet veel uit. Het traject van de drenkplaats naar de stal verandert immers niet van lengte. Maar voor de ezeldrijver maakt het wel wat uit.



Figuur 11 Met een ezelsbrugje

De rest van de discussie laat ik over aan de klas. Ook bij dit probleem verwacht ik dat de leerlingen vinden dat de rechte weg tussen de weide en de stal de kortste is, dat ze abstractie maken van de breedte van de rivier, dat ze deze afstand op schaal kunnen meten en deze kunnen omzetten naar de werkelijke afmetingen. Maar mijn grootste uitdaging is wel dat sommige leerlingen de link leggen met de 3-4-5 driehoek die aan het begin van de les werd vermeld. Als de tekening van het bord op de goede manier wordt aangevuld, verschijnt er een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 3 en 4. De schuine zijde moet in dit geval dus niet meer gemeten worden.

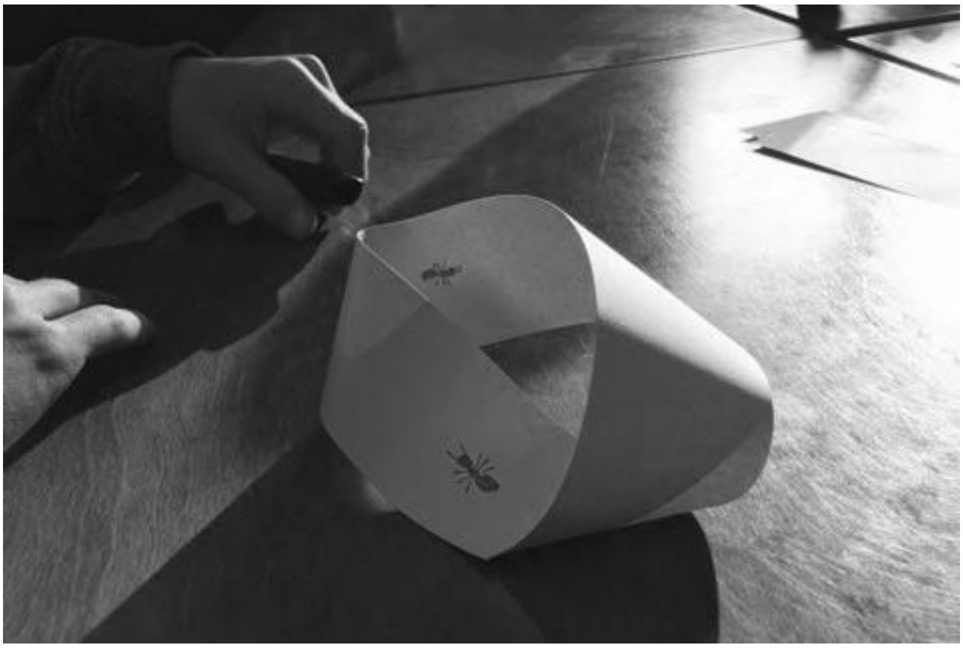
2.5. Uitdagingen los van leerplannen

In de wiskunde zijn er studiedomeinen die niet gekend zijn door het brede publiek en waar momenteel nog veel onderzoek in kan gedaan worden. Zo is er de grafentheorie (die verbindingen van knooppunten met lijnstukken onderzoekt), de topologie (de meetkunde van objecten die in rekbaar rubber gemaakt zijn), de speltheorie (de wiskunde die zich bezig houdt met strategische beslissingen in systemen met concurrenten) enz. Het is zinvol om de leerlingen te laten zien dat niet alle wiskunde te maken heeft met sommetjes, met vergelijkingen en met meetkundige vormen.

Daarom stap ik de klas in, gewapend met een papieren ring met een diameter van een dertigtal centimeter. Van nature uit ben ik niet van de magersten. Wanneer ik beweer dat ik over enkele ogenblikken door deze ring zal stappen zonder hem te doen scheuren, oogst dit wel wat hilariteit. De leerlingen merken op dat de ring niet goed in elkaar gezet is. Er zit een slag in. Uiteraard is dit niet het gevolg van mijn klungeligheid. Ik heb gewoon een band van Möbius gemaakt.

De band van Möbius is geen nieuw object in de wiskunde. Ik heb een verzamelalbum bij me met de werken van M. C. Escher, een kunstenaar die me steeds maar meer blijft fascineren. Ik laat een houtsnede zien uit 1963. Negen rode mieren achtervolgen elkaar op een band van Möbius die doorzichtig gemaakt is met grote mazen. Op deze manier zie je ook de mieren die op de achterkant kruipen. Of neen, er is helemaal geen achterkant bij de band van Möbius. De leerlingen staan versteld van deze uitspraak.

Vervolgens neem ik een schaar en knip de ring door op de ‘middenparallel’. Tot grote verbazing van de leerlingen, ontstaat er één grote ring waar ik vlotjes doorheen kruip. Ik vraag de leerlingen



Figuur 12 Geïnspireerd door M. C. Escher tekenen leerlingen mieren op een Möbiusband

of ik de band nog een keer (of zelfs nog een paar keer) zou kunnen doorknippen zo dat we er met de hele klas tegelijkertijd door zouden kunnen.

Het antwoord op die vraag, vergt wat meer inzicht. Wie goed oplet, kan zien dat de doorgeknipte band van Möbius geen band van Möbius meer is. In plaats van een enkele slag is er een dubbele slag in gekomen. We kunnen er dus niet meer van uitgaan dat de ring nog eens verdubbelt in omtrek als hij opnieuw doorgeknipt wordt.

Hier stop ik met mijn praatje (zowel in de les als in deze loep). Met voorbedachte rade. Want ik hoop dat hier en daar een leerling zo geïnteresseerd is in het probleem dat hij zelf verder op onderzoek gaat. Voor de lezers van deze loep kan is alvast verklappen dat de volgende verknipping twee banden oplevert die met een dubbele omwinding door elkaar gehaakt zijn.

3. Kort interview met een leraar in het tweede jaar

We hadden een kort gesprek met Lorenz Maes die wiskunde geeft in het tweede jaar van het Sint-Jozefsinstituut in Essen.

UW *Spelen jullie in op de kennis die leerlingen al hebben vanuit de lagere school? Merk je grote verschillen in voorkennis?*

LM We merken weinig verschil in voorkennis als we de verschillende lagere scholen vergelijken. Soms hebben we te maken met instroom vanuit Nederlandse scholen en dan merken we wel verschillen, vooral in de manier van noteren. In Nederland wordt ook minder de klemtoon gelegd op het studeren van eigenschappen en definities maar worden vooral toepassingen gemaakt.

UW *We vangen op dat de klasgroepen in de eerste graad erg heterogeen zijn waardoor sommige leerlingen het gevoel hebben dat het allemaal veel te traag gaat terwijl anderen worstelen met de leerstof en nood hebben aan extra verduidelijking. Ervaren jullie deze verschillen*?

LM Deze verschillen ervaren we zeer hard. Vooral bij het maken van oefeningen zien we een groot verschil in tempo.

UW *Hoe gaan jullie om met verschillen tussen leerlingen? Differentiëren jullie in de les wiskunde?*

LM Het verschil in tempo proberen we op te vangen door leerlingen extra verdiepingsoefeningen te laten maken. In het tweede jaar werken we ook met een systeem van wiskundige raadsels. In elke klas ligt een enveloppe met wiskundige raadsels die ingedeeld zijn naar niveau (groen = makkelijk, geel = gemiddeld, rood = moeilijk). Leerlingen die snel klaar zijn met oefeningen of met hun toets mogen een raadsel nemen en dit oplossen. Op deze manier worden de sterke leerlingen extra uitgedaagd. Ook de zwakkere leerlingen krijgen de kans om raadsels op te lossen. Door te werken met de kleuren kan iedereen een raadsel naar zijn niveau oplossen en zo succes ervaren.

UW *Jullie zetten de eerste stappen in co-teaching. Kun je hier iets over vertellen?*

LM Momenteel zetten we bij de co-teaching vooral in op het ontdubbelen van de klasgroep. Aangezien we met grote klasgroepen werken, is het aangenaam om één uur in de week aan een groep van maximum 12 leerlingen les te geven. We gaan vaak gewoon verder met de leerstof van de vorige lessen. We gebruiken deze uren ook om in kleine groepjes toetsen te verbeteren. In groepjes van vier leerlingen verbeteren ze hun toets en geven ze extra uitleg aan elkaar. Als leerkracht heb je dan maar drie groepjes te coachen, dus geeft dit ruimte voor goede persoonlijke begeleiding.

De leerlingen ervaren deze uren als zeer waardevol. Ze zijn vooral blij dat ze in een kleinere klasgroep kunnen les volgen en een meer persoonlijke coaching kunnen genieten.

Nu de examens in aantocht zijn, willen we deze uren ook aangrijpen om gericht aan herhaling te doen. Beide leerkrachten zullen dan een verschillend onderwerp aanbieden en de leerlingen kunnen dan zelf kiezen over welk onderwerp ze voor het examen extra uitleg willen.

We zijn nog wel steeds aan het zoeken naar hoe we deze uren het best invullen want het blijkt toch moeilijker dan verwacht. Moeten we dit lesuur volledig besteden aan remediëring voor de zwakken en uitbreiding voor de sterken? Deze vraag hebben we ons gesteld maar het lesuur volledig loskoppelen van ons programma brengt ons misschien in de problemen om ons leerplan gezien te krijgen.

4. Probleem van de week

In het Sint-Pieterscollege in Leuven wordt er sinds enkele jaren in de eerste graad gewerkt met "het probleem van de week". We interviewden Danielle Segers over het hoe en het waarom. Danielle geeft les in het tweede jaar.

UW *We hebben de indruk dat het eerste jaar voor veel leerlingen veel herhaling van de lagere school bevat. Sommige leerlingen komen met veel verwachting naar de grote school. Ze moeten dingen opnieuw doen die ze al gedaan hebben. Er zijn nieuwe aspecten, maar dat hebben ze niet altijd door.*

DS Het is zeker waar. In het eerste jaar gaat er inderdaad veel tijd naar bijvoorbeeld de staartdeling met kommagetallen, grootste gemeenschappelijke deler, kleinste gemeenschappelijk veelvoud... De leerlingen komen uit verschillende lagere scholen en die hebben een heel uiteenlopend niveau. Daarenboven hebben de leerlingen zelf ook heel verschillende niveaus.

Als je dan een begrip uitlegt, gaat het van "mijne meester zegt dit, mijn juffrouw zegt dat", niet alleen de eerste maanden, maar het hele jaar door. Dat maakt het heel moeilijk, zeker voor dingen die ze al kennen. In het tweede jaar gaat het allemaal over nieuwe leerstof. Iedereen heeft dezelfde uitleg gekregen en dan is er geen 'concurrentie' met de uitleg uit de lagere school.

UW *Klopt het dat sommige leerlingen, misschien de wiskundig sterkeren, teleurgesteld zijn door de herhaling van leerstof van de lagere school?*

DS Ik denk het wel, zeker als ik bij mijn eigen kinderen zie wat ze al in de lagere school leren. In het eerste jaar moeten ze zich aanpassen aan al die verschillende leerkrachten en ze moeten ook leren omgaan met verschillende taken en toetsen op één dag, enz. Daar kruipt bij die leerlingen heel veel energie in en dat wordt door ons, leerkrachten, vaak onderschat.

UW *Veel leerlingen uit de lagere school zijn gewoon om heel zelfstandig te werken: hoekenwerk, contractwerk... Hoe zit dat in de eerste graad van het secundair?*

DS In de eerste graad werken we met verschillende werkvormen (contractwerk, groepswerk, computeropdrachten…). Je ziet vaak dat bij verschillende werkvormen andere leerlingen heel actief zijn. Door met verschillende werkvormen te werken, spreken we telkens andere leerlingen aan. Niet alle leerlingen kunnen even zelfstandig werken. Door de afwisseling komt iedere leerling wel aan bod.

UW *Wat was de aanleiding om het project rond het 'probleem van de week' uit te werken?*

DS Wij zijn beginnen nadenken toen de puntenverdeling tussen dagelijks werk en proefwerk van 25%-75% verschoof naar 50%-50%. Dat wil zeggen dat het dagelijks werk voor veel meer meetelt en dus belangrijker wordt. We wilden daar iets degelijks mee doen. Je wilt ook je leerlingen na de eerste graad het juiste advies geven voor de tweede graad. We maken bij het dagelijks werk een onderscheid tussen kleine toetsen en taken enerzijds en herhalingstoetsen anderzijds. Verder geven we ook een cijfer op leren leren, ICT en attitudes.

We proberen ook de wiskunde eens op een andere manier aan te pakken. Probleemoplossend denken was iets wat te weinig aan bod kwam. Zo kwamen we bij het 'probleem van de week'. Het is de bedoeling om leerlingen die niet zo gemotiveerd of niet zo sterk zijn voor wiskunde ook mee te krijgen. We willen aan die leerlingen laten zien dat er meer is dan de wiskunde van in de klas. Die problemen van de week zijn concrete problemen die de leerlingen aanspreken. De leerlingen krijgen 12 problemen over het ganse schooljaar verspreid. Zo is het probleemoplossend denken niet iets van één moment in het jaar. Daarnaast stimuleren we de leerlingen om deel te nemen aan de kangoeroewedstrijd.

UW *Hoe gaan jullie praktisch aan het werk met het probleem van de week?*

DS We hebben eerst heel wat geëxperimenteerd en na een paar jaar zijn we tot een systeem gekomen dat werkt. Alle collega's van de eerste graad doen hieraan mee. Het heeft ongeveer twee jaar geduurd om een werkwijze te vinden waarbij elk van de collega's zich goed voelde.

We gebruiken een grote kalender met vier problemen per maand (Carreyn, B., *VBTL 2 – Probleem-van-de-weekkalender*, Die Keure). In elke klas hangt zo'n kalender. We gebruiken er niet alle problemen van. We zijn nu gekomen tot een set van 12 problemen waarvan we weten dat de leerlingen ze aankunnen en die toch voldoende uitdaging bevatten. Sommige problemen sluiten aan bij de leerstof, andere niet. *(Je vindt een voorbeeld van zo'n probleem in figuur 13, n.v.d.r.)*

In de klas leggen we in het begin van het jaar het hele opzet uit. Telkens we een nieuw probleem opgeven wordt dat ook in de klas voorgelezen en eventueel wordt er een woordje uitleg gegeven als niet alles duidelijk is. De leerlingen mogen per twee aan het probleem werken. Ze mogen kiezen met wie ze samenwerken. Het zoekwerk gebeurt thuis. Iedereen zoekt op het probleem en schrijft zijn oplossing op. In de klas controleren we of iedereen gezocht heeft. Ze worden daar niet op

Sint-Pieterscollege
Minderbroedersstraat 13
3000 Leuven

Wiskunde

Naam: ……………………………………

Klas: ……………

Voorstellingsdatum: ……/……/ 20……

Het Coca-Colaprobleem

In een bak cola staan 24 flesjes opgesteld in 4 rijen van 6. Er staan dus in elke horizontale en elke verticale rij een even aantal flesjes.

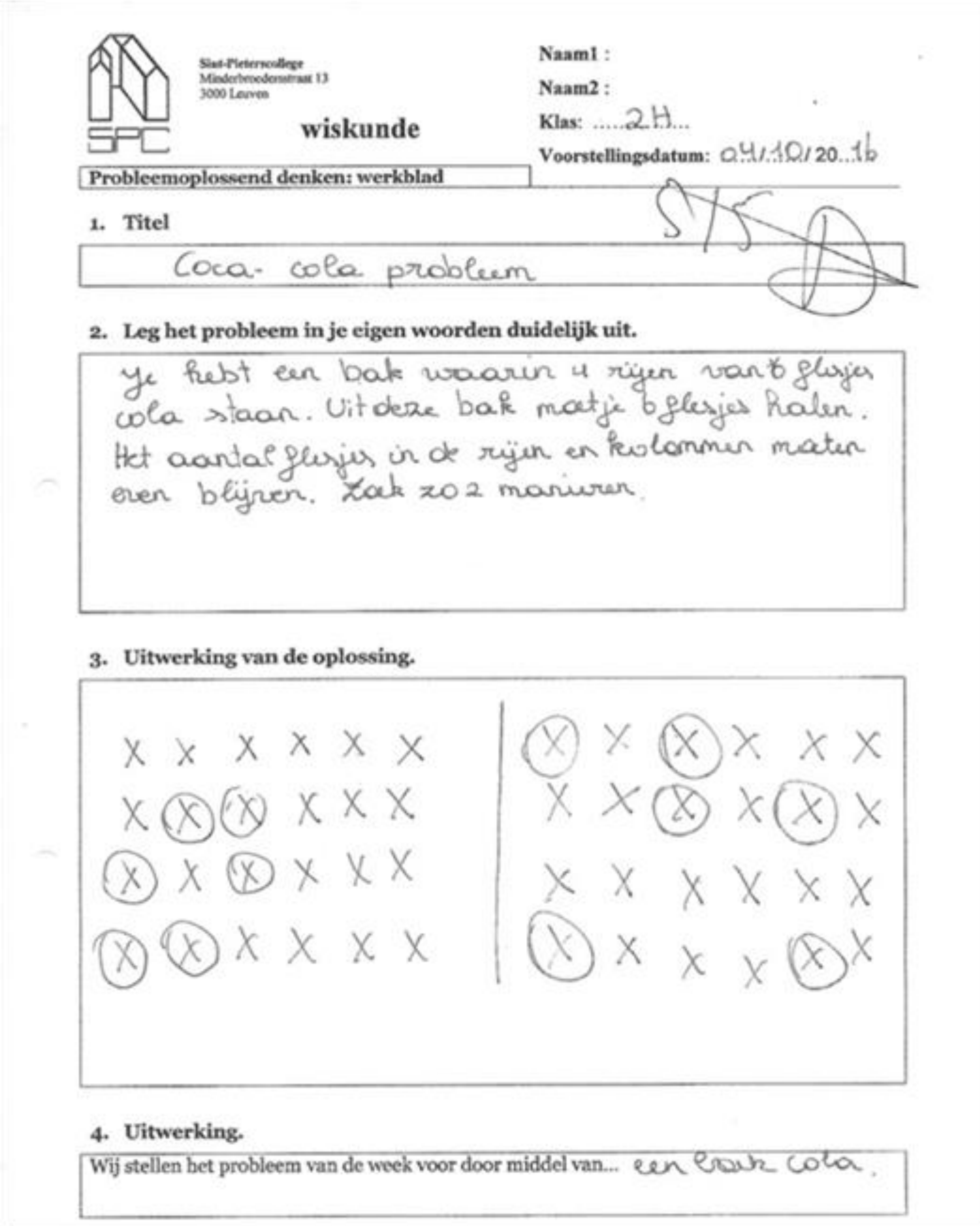
<u>Noteer</u> één manier waarop je 6 flesjes uit de bak kan nemen zodat in elke horizontale en elke verticale rij een even aantal flesjes overblijven.

Probleem 1

Uitwerking van de oplossing

Figuur 13 Een voorbeeld van een 'probleem van de week' (Uit VBTL 2 – Probleem-van-de-weekkalender) gequoteerd. Het gaat er eigenlijk niet om of het juist is. Dan wordt er gevraagd wie het ziet zitten om het probleem te presenteren. Dit doen ze ook per twee. Als er meerdere kandidaten zijn, wordt er een nummertje getrokken. Bij de twee leerlingen die hun oplossing voor de klas moeten brengen, kijken we wel of ze het juist hebben opgelost. Als het nodig is, helpen we ze een beetje. Die leerlingen krijgen dan minstens een week de tijd om hun presentatie voor te bereiden. We verwachten van hen dat ze dat samen doen. Deze samenwerking vinden we belangrijk. Om die presentatie voor te bereiden krijgen ze een apart blad (zie figuur 14). Ze moeten eerst het probleem in eigen woorden formuleren, vervolgens zeggen hoe ze het gaan oplossen en op welke manier ze het gaan brengen. Dat kan een toneeltje zijn, of op het bord, met materiaal, een PowerPoint, of met een rap… Ze kunnen dat zelf kiezen. We zien dat leerlingen die wiskundig niet zo heel sterk zijn, soms wel heel creatief zijn in de presentatie.

Het blad met de voorbereiding willen wij in de loop van de week voor de presentatie zien zodat we nog kunnen bijsturen. De presentatie zelf mag maar een tweetal minuten duren. Als een duo


Sint-Pieterscollege
Minderbroedersstraat 13
3000 Leuven

SPC

wiskunde

Naam1 :
Naam2 :
Klas: .....2H...
Voorstellingsdatum: 04/10/20.16

Probleemoplossend denken: werkblad

1. Titel

Coca- cola probleem

2. Leg het probleem in je eigen woorden duidelijk uit.

Je hebt een bak waarin 4 rijen van 6 flesjes cola staan. Uit deze bak moet je 6 flesjes halen. Het aantal flesjes in de rijen en kolommen moeten even blijven. Zoek zo 2 manieren.

3. Uitwerking van de oplossing.

4. Uitwerking.

Wij stellen het probleem van de week voor door middel van... een bak cola.

Figuur 14 Voorbereidingsblad voor de presentatie vastloopt op een probleem, kunnen we dat opvangen als ze met hun voorbereidingsblad tot bij ons komen. We helpen hen dan op weg. De belangrijke vraag is of zij het dan kunnen uitleggen aan de klas. Zij verliezen geen punten als ze in de eerste fase de oplossing niet gevonden hadden. Ze kunnen 5 punten op voorhand verdienen door hun best ervoor te doen, bij het voorbrengen krijgen ze 1 punt als ze het probleem goed geschetst hebben, 2 punten als ze de oplossing duidelijk hebben uitgelegd en 2 punten om het op een creatieve manier te brengen. Bij de presentatie krijgen de andere leerlingen een puntenblad (zie figuur 15). Een deel van hun score wordt dus door de klasgenoten gegeven.

UW *Vanaf dit schooljaar voerden jullie nog een nieuwigheid in. Kun je daar iets meer uitleg over geven?*

DS In het eerste jaar zitten de wiskundig sterke leerlingen vooral in de Latijnse en die hebben een uur minder wiskunde dan de leerlingen in de Moderne. Voor de leerlingen uit de Latijnse gaat het gewoon wat sneller. Maar in het tweede jaar hebben ze allemaal 5 uur wiskunde. We zien daar grote verschillen tussen de leerlingen. We gaven elke week inhaallessen om de zwakkere leerlingen te laten bijbenen, wat een grote belasting is voor de leerkrachten en leerlingen.

We gingen op zoek naar een manier om het anders aan te pakken. We mochten van de directie ‘out of the box’ denken. We bedachten een systeem waarbij we één uur in de week twee klassen samen nemen en daar plaatsen we nog een derde leerkracht bij. De leerlingen van die twee klassen worden dan in drie groepen ingedeeld en die groepen krijgen op hetzelfde moment les in drie verschillende lokalen. Tijdens dat uur gaat de gewone leerstof niet verder. De groepen wisselen elke week van samenstelling en ze zijn niet volgens niveau ingedeeld. In elke groep blijven sterke en minder sterke leerlingen samenzitten. Doordat de groepen kleiner zijn, kan er gemakkelijker gedifferentieerd worden binnen de groep. De leerlingen die het moeilijker hebben, krijgen de basis nog eens uitgelegd. De kans is groot dat ze niet bij hun eigen leerkracht zitten en dus de leerstof eens op een wat andere manier uitgelegd krijgen. Na enkele weken ervaring met het nieuwe systeem ondervinden we dat het een meerwaarde heeft dat de leerlingen eens in een andere lesgroep zitten met een andere leerkracht. De leerlingen die het beter kunnen, kunnen dan iets heel anders doen. Bijvoorbeeld

SPC	Probleemoplossend denken: puntenblad leerling	Naam: Klas:

Namen groepsleden	Datum + titel Probleem	Duidelijk uitgelegd wat probleem is.	Duidelijk uitgelegd hoe je tot de oplossing komt	Creatieve voorstelling	Totaal
		0 1	0 1 2	0 1 2	/5
		0 1	0 1 2	0 1 2	/5
		0 1	0 1 2	0 1 2	/5
		0 1	0 1 2	0 1 2	/5
		0 1	0 1 2	0 1 2	/5
		0 1	0 1 2	0 1 2	/5
		0 1	0 1 2	0 1 2	/5
		0 1	0 1 2	0 1 2	/5

Figuur 15 Voorbeeld puntenblad leerlingen

bij het ontbinden in factoren ben je een hele week oefeningen aan het maken. De sterke leerlingen zijn na drie dagen door hun oefeningen heen. Zij worden nu niet echt beloond. In dat opgesplitst uur zouden we bv. problem solving kunnen doen of denkspelletjes of spelletjes met ruimtelijk inzicht.

UW *Het gaat dus eerder in de richting van problem solving en niet bijvoorbeeld in de richting van meer bewijzen of verklaren en verbanden leggen tussen stukken van de leerstof?*

DS Nee, ik denk dat dat nog te vroeg is. We hebben ook een ganzenbord uitgewerkt op basis van de leerstof. Het is ook de bedoeling om eens iets dergelijks te doen met de minder sterke leerlingen. Door die in een kleinere groep te hebben, kunnen we ze beter begeleiden en moeten we ze niet elke week buiten de lessen bijwerken.

We staan allemaal achter het concept. We zullen wel heel sterk moeten samenwerken en hoe het praktisch zal lopen, zullen we nog zien.