Tweedegraadsvergelijkingen bij Lagrange

Martino Buchini en Caterina Vicentini

Vertaling: Michel Roelens

1. Inleiding

Dit artikel bevat materiaal voor een lessenreeks waarin leerlingen van de laatste jaren van het secundair onderwijs kennis maken met een stukje historische wiskunde. De lessenreeks kadert in een 'humanistische' visie op wiskunde, als mensenwerk in de loop van de geschiedenis. We brengen de leerlingen rechtstreeks in contact met een originele tekst van de Italiaans-Franse wiskundige Joseph-Louis Lagrange: "*Additions au Mémoire sur la résolution des équations numériques*" (zie Lagrange, 1770 en Serret, 1879). Door de confrontatie met deze historische tekst leren de leerlingen technieken die in de traditionele curricula zelden voorkomen. Bovendien scherpen ze hun wiskundige competenties aan door over alle tussenstappen na te denken.

In groepjes bespreken de leerlingen een methode om oplossingen van tweedegraadsvergelijkingen met gehele coëfficiënten benaderend op te lossen. Wat wij tegenwoordig doen wanneer we een irrationale oplossing 'uitrekenen' met de rekenmachine, komt neer het benaderen van die oplossing door een eindig decimaal getal. In het fragment dat we laten bestuderen, worden de oplossingen niet door decimale getallen benaderd maar door breuken die *beste benaderingen* zijn: na elke stap van de iteratieve werkwijze krijg je een breuk $\frac{p}{q}$, *convergent* genoemd, zodanig dat er geen enkele breuk bestaat met een noemer kleiner dan of gelijk aan q die minder van de exacte oplossing afwijkt dan $\frac{p}{q}$ (zie Lang, 1995). Merk op dat eindige decimale benaderingen niet noodzakelijk 'beste benaderingen' zijn; in die zin is deze methode 'beter' dan het intypen in de rekenmachine.

Over de auteurs: Martino Buchini geeft les aan het Liceo Scientifico N. Copernico te Udine (Italië) en Caterina Vicentini aan het Liceo Artistico M. Fabiani te Gorizia (Italië).

2. Aanpak van de lessenreeks

Onze didactische aanpak is geïnspireerd door *cooperative learning* (zie GEM, 1985 en Johnson, Johnson en Holubec, 2008). De leerlingen werken in groepen van vier aan de opdrachten die ze van de leerkracht krijgen. Elke sessie, idealiter twee lesuren, ontwikkelt zich in drie fasen.

De leerlingen krijgen eerst een vijftal minuten om de oorspronkelijke tekst individueel te lezen. Vervolgens werken ze gedurende ongeveer 45 minuten in duo's die van les tot les kunnen wisselen binnen dezelfde groep. Het werk van de duo's bestaat uit een geleide reflectie, aangestuurd door vragen van de leerkracht. De leerlingen moeten hun antwoorden uitschrijven.

Dan krijgen de duo's ongeveer 30 minuten om hun antwoorden te confronteren met die van het andere duo van dezelfde groep. Als de antwoorden of de verantwoordingen niet overeenkomen, moeten ze binnen het groepje tot overeenkomst komen of eventuele meningsverschillen motiveren.

Tijdens de laatste 20 minuten delen de verschillende groepen hun bevindingen met de rest van de klas. De leraar valideert de resultaten en geeft als huiswerk mee om individueel tegen de volgende les een nette kopij van de antwoorden te redigeren.

De lessenreeks kan eventueel ook voorafgegaan worden door een historische inleiding over de figuur van Lagrange en zijn tijd en kan gevolgd worden door een wiskundige nabespreking. In dit geval zijn er zes sessies nodig in plaats van vier.

De volgende paragrafen bevatten telkens een fragment van de tekst van Lagrange, links in het Frans en rechts in vertaling. Daaronder komen de vragen voor de leerlingen met korte antwoorden voor de lezers.

3. Eerste les

Originele tekst van de eerste les

Considérons l'équation générale du second degré

Beschouw de algemene vergelijking van de tweede graad

$$E_1x^2 - 2\epsilon x - E = 0,$$

dans laquelle E, E_1 et ϵ sont supposés des nombres entiers, tels que $\epsilon^2 + EE_1 > 0$, pour que les racines soient réelles ; cette équation, étant résolue, donne

waarin wordt aangenomen dat E, E_1 en ϵ gehele getallen zijn die voldoen aan $\epsilon^2 + EE_1 > 0$, zodat de wortels reëel zijn; deze vergelijking, eenmaal opgelost, geeft

$$x = \frac{\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + EE_1}}{E_1},$$

où le radical peut être pris positivement ou négativement.

waarbij de wortel zowel positief als negatief kan worden genomen.

Vragen en leidraad voor de bespreking

1. Lagrange spreekt over gehele coëfficiënten. Bedoelt hij dat E, E_1 en ϵ natuurlijke getallen zijn of mogen die ook negatief zijn?

   Ze mogen negatief zijn, anders zou het overbodig zijn te vermelden dat de discriminant positief moet zijn.

2. Stelt het symbool x in de gelijkheid $x = \frac{\epsilon+\sqrt{\epsilon^2+EE_1}}{E_1}$ een variabele voor of een constante?

   Een constante (of beter: twee constanten, zie vraag 6).

3. Als ϵ geheel is, zoals Lagrange veronderstelt, is de coëfficiënt van x, namelijk -2ϵ, een even getal. Is dit volgens jullie een 'beperkende' veronderstelling? Anders gezegd, zal de methode die Lagrange voorstelt niet toegepast kunnen worden op tweedegraadsvergelijkingen waarbij de coëfficiënt van de eerstegraadsterm oneven is?

   Neen, de veronderstelling is niet beperkend. Als die coëfficiënt oneven is volstaat het de vergelijking met 2 *te vermenigvuldigen.*

4. Betekent de aanname dat E_1, ϵ en E geheel zijn, dat wat volgt niet toepasbaar zal zijn op vergelijkingen met willekeurige rationale coëfficiënten?

   Neen, het volstaat de vergelijking te vermenigvuldigen met het k.g.v. van de noemers van de coëfficiënten.

5. Maak de berekeningen om aan te tonen dat $x = \frac{\epsilon+\sqrt{\epsilon^2+EE_1}}{E_1}$ effectief een van de oplossingen is van de gegeven vergelijking. Welke formule is gebruikt en wat is precies die $\epsilon^2 + EE_1$?

   Er is gebruik gemaakt van de 'gereduceerde formule' voor een tweedegraadsvergelijking waarvan de coëfficiënt van de eerstegraadsterm even is. Je vindt deze formule uit de abc-formule door de teller en de noemer te delen door 2. *Wat onder de wortel staat is* $\frac{1}{4}$ *van de discriminant.*

6. Had de notatie $\sqrt{\epsilon^2 + EE_1}$ ten tijde van Lagrange volgens jullie een ondubbelzinnige betekenis?

   Neen, want Lagrange vermeldt dat je er het teken van mag kiezen.

4. Tweede les

Originele tekst van de tweede les

Supposons que la racine cherchée soit positive, et soit λ_1 le nombre entier qui sera immédiatement plus petit que la valeur de x ; on fera donc

Veronderstel dat de gevraagde oplossing positief is en zij λ_1 het geheel getal dat direct kleiner is dan x. We stellen dan

$$x = \lambda_1 + \frac{1}{x_1},$$

et, substituant cette valeur dans l'équation proposée, on aura une équation transformée dont l'inconnue sera x_1; or si, après avoir fait la substitution, on multiplie toute l'équation par x_1^2, qu'ensuite on change les signes et qu'on suppose, pour abréger,

en door deze waarde te substitueren in de gegeven vergelijking, verkrijgen we een vergelijking met als onbekende x_1. Als we nu, na deze substitutie, de hele vergelijking vermenigvuldigen met x_1^2, en dan de tekens veranderen en de volgende kortere notaties invoeren

$$\epsilon_1 = \lambda_1 E_1 - \epsilon,$$
$$E_2 = E + 2\epsilon\lambda_1 - E_1\lambda_1^2,$$

on aura la transformée

dan krijgen we de getransformeerde vergelijking

$$E_2 x_1^2 - 2\epsilon_1 x_1 - E_1 = 0$$

[...]

Vragen en leidraad voor de bespreking

1. Wat is de waarde van λ_1 wanneer $x = \sqrt{3}, x = -1 + \sqrt{17}, x = \frac{2+\sqrt{7}}{2}$? Welk soort getal x_1 in deze drie gevallen?

   1, 3, 2*; irrationaal.*

2. Als we deze methode zouden toepassen op een oplossing x die een natuurlijk getal is, dan zou x_1 ongedefinieerd zijn. Leg uit waarom.

   In dat geval zou $\lambda_1 = x$ *en dus zou* $\frac{1}{x_1}$ *gelijk zijn aan* 0*, wat onmogelijk is.*

3. Als x een rationaal getal is maar geen geheel getal, welk soort getal is dan x_1?

   Een rationaal getal (dat eventueel ook geheel kan zijn).

4. In de gelijkheid $x = \lambda_1 + \frac{1}{x_1}$ stelt x de onbekende van de vergelijking voor en niet zijn oplossing. Welk van de twee termen van het rechterlid van de gelijkheid wordt hier als een variabele beschouwd en welke term als een constante?

   x_1 *wordt beschouwd als variabele en* λ_1 *als constante.*

5. Lagrange vervangt in de gegeven vergelijking x door $\lambda_1 + \frac{1}{x_1}$. Op die manier voert hij – zoals wiskundigen dit noemen – een 'verandering van variabele' uit en verkrijgt hij een getransformeerde vergelijking. Volg de instructies van Lagrange en controleer of de berekeningen correct zijn.

5. Derde les

Originele tekst van de derde les

De derde les gaat verder op de tekst van de tweede les.

[Op het tweede fragment volgt:]

laquelle donnera

die geeft

$$x_1 = \frac{\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 + E_1E_2}}{E_2}.$$

On cherchera donc le nombre entier λ_2, qui sera immédiatement plus petit que cette valeur de x_1, et l'on fera

We zoeken dus het geheel getal λ_2, dat onmiddellijk kleiner is dan x_1, en we stellen

$$x_1 = \lambda_2 + \frac{1}{x_2},$$

et ainsi de suite.

en ga zo maar door.

Maintenant, je remarque que la quantité $\epsilon_1^2 + E_1E_2$, qui est sous le signe dans l'expression de x_1, devient, en substituant les valeurs de ϵ_1 et de E_2, et ôtant ce qui se détruit, celle-ci: $\epsilon^2 + EE_1$, qui est la même que celle qui est sous le signe dans l'expression de x; d'où il est facile de conclure que la quantité radicale sera toujours la même dans les expressions de x, x_1, x_2,...

Nu merk ik op dat de hoeveelheid $\epsilon_1^2 + E_1E_2$, die onder het [wortel]teken staat in de uitdrukking voor x_1, wanneer we de waarden van ϵ_1 en van E_2 invullen en weglaten wat elkaar opheft, gelijk wordt aan $\epsilon^2 + EE_1$, wat hetzelfde is als wat onder het teken stond in de uitdrukking voor x. Hieruit kan men gemakkelijk besluiten dat de hoeveelheid onder de wortel altijd dezelfde zal zijn in de uitdrukkingen voor $x, x_1, x_2, \dots$

Vragen en leidraad voor de bespreking

1. Waarom, denk je, had Lagrange in het vorige fragment de coëfficiënt van de tweedegraadsterm E_2 genoemd en de helft van de coëfficiënt van de eerstegraadsterm $-\epsilon_1$?

   Omwille van de symmetrie in de getransformeerde vergelijkingen, waarop de procedure op een analoge manier kan worden toegepast.

2. Lijkt het je noodzakelijk om de berekeningen te verifiëren die leiden tot de oplossing $x_1 = \frac{\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 + E_1E_2}}{E_2}$?

   Neen, de getransformeerde vergelijking is helemaal analoog aan de vergelijking van het begin.

3. Lagrange suggereert dat dit proces op dezelfde manier kan worden verdergezet. Probeer te anticiperen op de volgende stap.

   Zie het volgende fragment.

4. Als x irrationaal is, zal het proces nooit eindigen. Leg uit waarom.

   Als het proces zou stoppen, zou x rationaal zijn. Immers, stel dat het proces stopt na k stappen en dat dus x_k geheel is. Dan is $x_{k-1} = \lambda_k + \frac{1}{x_k}$ rationaal, en ook x_{k-2}, enzovoort tot x.

5. Als x rationaal is, stopt het proces zeker na een eindig aantal iteraties. Probeer dit te bewijzen.

   (Merk op dat deze vraag beroep doet op een nogal gevorderde redenering, die steunt op het principe van de oneindige afdaling. Deze vraag is enkel voor wiskundig sterke leerlingen.) Als x rationaal is, dan zijn ook $x_1, x_2, \dots$ rationaal (zie vraag 3 van de tweede les). Veronderstel dat het proces niet stopt en beschouw een willekeurige x_k. Noteer x_k als $\frac{p}{q}$ met $p \in \mathbb{Z}$ en $q \in \mathbb{N}_0$. Het getal $x_k - \lambda_{k+1} = \frac{p - \lambda_{k+1}q}{q}$ noteren we als $\frac{r}{q}$.

Omdat λ_{k+1} het geheel deel is van x_k, is $\frac{r}{q} < 1$ en dus $r < q$. Verder is $r \neq 0$ want we veronderstellen dat het proces niet stopt. Nu is $x_k = \lambda_{k+1} + \frac{r}{q} = \lambda_{k+1} + \frac{1}{x_{k+1}}$, dus: $x_{k+1} = \frac{q}{r}$. De noemer van x_{k+1} is kleiner dan die van x_k. In de veronderstelling dat het proces niet stopt, vormen de noemers van $x_1, x_2, , \ldots$ een strikt dalende oneindige rij van natuurlijk getallen, wat onmogelijk is.

6. Reken na dat de laatste opmerking van Lagrange in dit fragment correct is.

6. Vierde les

Originele tekst van de vierde les

Donc si l'on a fait, pour abréger,

Dus als we stellen, om in te korten,

$$B = \epsilon^2 + EE_1,$$

et qu'on prenne (le signe < dénote qu'il faut prendre le nombre entier qui est immédiatement moindre)

en als we aannemen (het teken < duidt aan dat je het geheel getal neemt dat onmiddellijk kleiner is) dat

$$\lambda_1 < \frac{\epsilon + \sqrt{B}}{E_1}, \qquad \epsilon_1 = \lambda_1 E_1 - \epsilon,$$

$$E_2 = E + 2\epsilon\lambda_1 - E_1\lambda_1^2, \qquad \lambda_2 < \frac{\epsilon_1 + \sqrt{B}}{E_2}, \qquad \epsilon_2 = \lambda_2 E_2 - \epsilon_1,$$

$$E_3 = E_1 + 2\epsilon_1\lambda_2 - E_2\lambda_2^2, \qquad \lambda_3 < \frac{\epsilon_2 + \sqrt{B}}{E_3}, \qquad \epsilon_3 = \lambda_3 E_3 - \epsilon_2, \ldots,$$

[Merk op: Lagrange stelt met de verschillende λ's het *geheel deel* voor van de overeenkomstige x-waarden. Blijkbaar beschikte Lagrange niet over de notatie $\lfloor x \rfloor$. Hij grijpt daarom naar een oneigenlijk gebruik van het symbool < en hij legt tussen haakjes uit wat hij bedoelt.]

on aura

krijgen we

$$x = \frac{\epsilon + \sqrt{B}}{E_1} = \lambda_1 + \frac{1}{x_1},$$

$$x_1 = \frac{\epsilon_1 + \sqrt{B}}{E_2} = \lambda_2 + \frac{1}{x_2},$$

$$x_2 = \frac{\epsilon_2 + \sqrt{B}}{E_3} = \lambda_3 + \frac{1}{x_3}, \ldots,$$

d'où

waaruit volgt

$$x = \lambda_1 + \cfrac{1}{\lambda_2 + \cfrac{1}{\lambda_3 + \cfrac{1}{\ldots}}}.$$

Quant au radical $\sqrt{B}$, il faudra toujours lui donner le même signe qu'on lui a supposé dans la valeur de la racine cherchée x.

Wat de wortel $\sqrt{B}$ betreft, moeten we die altijd hetzelfde teken toekennen als in het begin bij de gezochte oplossing x.

Vragen en leidraad voor de bespreking

1. De algebraïsche uitdrukking $\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_3 + \frac{1}{\dots}}}$ wordt een "*kettingbreuk*" genoemd. Als we stoppen na een bepaald aantal stappen, door bv. $\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2}$ of $\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_3}}$ te nemen, krijgen we de zogenaamde "*convergenten*" van x. Dit zijn benaderingen van x die steeds nauwkeuriger worden naarmate het aantal stappen toeneemt. Bereken de eerste drie convergenten van de positieve oplossing van de vergelijking $2x^2 - 2x - 1 = 0$.

   De getransformeerde vergelijking valt afwisselend samen met de gegeven vergelijking $2x^2 - 2x - 1 = 0$ *en met de eerste getransformeerde* $x^2 - 2x - 2 = 0$; $\lambda_{2n-1} = 1, \lambda_{2n} = 2$. *De opeenvolgende beste breukbenaderingen van x zijn* $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1}} = \frac{4}{3}, 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = \frac{11}{8}$.

2. Los de vergelijking $11x^2 + 8x - 28 = 0$ op met de methode van Lagrange. Hoeveel getransformeerde vergelijkingen moet je bepalen?

   Eén oplossing is geheel, namelijk -2, *daarvoor zijn dus geen getransformeerden nodig, de andere is rationaal, namelijk* $\frac{14}{11}$, *en vergt drie getransformeerden. We kunnen deze breuk schrijven als de eindige kettingbreuk* $1 + \frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$.

3. Deze werkwijze kan ook worden aangepast om een gegeven irrationaal getal te benaderen. Bereken de eerste vijf convergenten van $\sqrt{2}$?

   Neem gewoon $x^2 - 2 = 0$. *Alle getransformeerde vergelijkingen zijn* $x^2 - 2x - 2 = 0$. *De kettingbreuk is* $1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}}$ *en de convergenten zijn* $\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70} \dots$

4. Bereken de kettingbreuk die de gulden snede $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ benadert (dit getal is de oplossing van de vergelijking $x^2 - x - 1 = 0$). Wat is er zo bijzonder aan de getransformeerde vergelijking? Bereken de eerste vijf convergenten. Kun je een regelmaat herkennen in de opeenvolging van de tellers en noemers van de convergenten, zodat je kunt voorspellen wat de tiende zal zijn?

   Door met 2 *te vermenigvuldigen wordt de vergelijking* $2x^2 - 2x - 2 = 0$; *de eerste getransformeerde, en dus ook alle volgende, zijn gelijk aan de vergelijking van het begin; alle* λ_i *zijn gelijk aan* 1. *De kettingbreuk is dus* $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}$ *en de convergenten zijn* $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13} \dots$ *Hierin herkennen we de getallen van Fibonacci.*

7. Conclusies

Zoals we gezien hebben, benadert Lagrange de oplossingen van tweedegraadsvergelijkingen met kettingbreuken. In de inleiding kondigden we al aan dat elke convergent $\frac{p}{q}$ die met deze werkwijze verkregen wordt, dichter ligt bij de reële oplossing dan alle andere breuken $\frac{a}{b}$ met een noemer $b \leq q$ (Lang, 1995). Bij elke stap vormt de convergent aldus een 'best mogelijke' rationale benadering. Moderne rekenmachines benaderen de oplossingen met eindige decimale getallen; in vergelijking met de convergenten van Lagrange zijn dit vaak minder goede benaderingen.

Deze lessen kunnen als dusdanig in de klas gebracht worden, of ze kunnen ook dienen als vertrekpunt voor verdere verdieping. Bijvoorbeeld, om zicht te krijgen op een aspect van het wiskundig denken van Lagrange, kan men er nog een ander fragment bij nemen, dat verderop in hetzelfde werk voorkomt (Serret, 1879, Deel VIII, p. 15). Hierin geeft Lagrange zijn visie over de betekenis van algebra.

Zoals reeds vermeld in de inleiding willen we de leerlingen niet enkel een nieuwe methode bijbrengen. We willen hen ook laten stilstaan bij de betekenis van de methode. Dit is voor ons cruciaal: zonder deze reflectie blijven de leerlingen te fel afhankelijk van de leraar en riskeert het echte inzicht in het geleverde werk uit te blijven. Verder gaan dan het leren van technieken kan op vele manieren gerealiseerd worden, maar dit moet steeds gepaard gaan met een uitwisseling van ideeën (Lakoff & Núñes, 2000; Sfard, 2008; Vicentini, 2004).

We denken dat de geschiedenis van de wiskunde moet worden gebruikt in het wiskundeonderwijs, en niet enkel op een anekdotische manier. Dit artikel stelt voor om de geschiedenis bijna als een bloemlezing te integreren, een beetje zoals dit in taalvakken of bij filosofie gebeurt. Het doel is om leerlingen bewust te maken dat de wiskunde een sterke 'humanistische' component heeft: wiskunde is gemaakt door mensen die een eigen leven en geschiedenis hebben en een hele maatschappelijke achtergrond. We willen laten begrijpen dat de 'randvoorwaarden' voor het creëren van wiskunde invloed hebben op het wiskundige product. Ook daarom vinden we het beter om ook een historische inleiding te voorzien zodat de leerlingen begrijpen wie Lagrange was, in welke tijd hij leefde en in welke omstandigheden hij gewerkt heeft.

Bronnen

GEM (1985). Lettre du GEM au GFEN, *Dialogue. Revue bimestrelle du Groupe Français d'Education Nouvelle*, 54 bis, 10-27.

Johnson D. W., Johnson R. T., Holubec E. J. (2008). *Cooperative Learning in the Classroom*. Edina (Minnesota): Interaction Book Company.

Lagrange J.-L. (1770). *Sur la résolution des équations numeriques, Additions*. In: Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin 1768, Berlin, 111-180.

Lakoff G., Núñez R. E. (2000). *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books (Perseus Books Group).

Lang S. (1995). *Introduction to Diophantine Approximations*. New Expanded Edition. New York: Springer-Verlag.

Serret M. J.-A., (Ed.) (1879). *Œuvres de Lagrange*. Paris: Gauthier-Villars.

Sfard A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press.

Tall D. (2013). *How Humans Lears to Think Mathematically. Exploring the Three Worlds of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Vicentini C. (2004). Once upon a time mathematics… *History and Pedagogy of Mathematics Fourth Summer University, History and Epistemology of Mathematics, Proceedings of the Uppsala ICME 10 Satellite Meeting*, 438-447.