



# Onder de loep

## Wiskundeprojecten in fysische contexten

Michel Roelens, Luc Van den Broeck

### Inhoud

1. Inleiding
2. De kaduke balans
3. Drijvende en zinkende doosjes
4. De hobbelerende bierviltjes
5. De ronde biljarttafel
6. Een wedstrijd pirouetten draaien
  - 6.1. Zes deelnemers aan de wedstrijd
  - 6.2. Traagheidsmassa van massieve lichamen
  - 6.3. Traagheidsmassa van holle lichamen
  - 6.4. Theoretische achtergrond
7. Meer lezen?

## 1. Inleiding

### Doel van deze loep

Twee keer schreven we al een loep over fysica (UW 10/3 en UW 32/1). In de eerste loep vergeleken we de leerplannen van beide vakken. En in de tweede ging het voornamelijk over hoe wiskunde de begripsvorming in de fysica's vooruit kan helpen en hoe fysica een motivatie kan vormen voor de wiskundeles. Begripsvorming en transfer waren toen de kernwoorden.

In deze loep laten we zien dat er nog meer verbanden tussen deze twee disciplines kunnen benut worden. Het doel van deze loep is aan te tonen dat er een rijke schat aan onverwachte en onvoorspelbare resultaten aan de oppervlakte komt door een fysisch probleem wiskundig door te rekenen. In tegenstelling met de 'wiskunde leren vanuit toepassingen', waarover we vroeger al heel wat geschreven hebben, gaat het hier eerder over 'toepassingen analyseren vanuit wiskunde'. Je gebruikt de problemen uit deze loep

duis best ter afronding van een bepaald leerstofonderdeel.

Om fysische ontdekkingen te doen, hoeven we niet altijd fysische experimenten uit te voeren (ook al kunnen ze motiverend werken en de nieuwsgierigheid prikkelen). We kunnen ook veel ontdekken door wiskundige redeneringen te maken vanuit enkele fysische wetten, bijvoorbeeld: de hefboomwet, de wet van Archimedes, de lichtbrekingswet van Snellius, de wet van Ohm, de wet van Hooke ... We gebruiken deze wetten dan zoals axioma's in de meetkunde. Elke correcte redenering en berekening die gemaakt wordt door te steunen op deze axioma's heeft overtuigingskracht en brengt mogelijk inzicht bij.

### Indeling van de loep

Hoe meer wiskundige bagage leerlingen hebben, hoe meer verbanden er kunnen gelegd worden tussen wiskunde en fysica. We hoeven echter niet te wachten tot in de derde graad om bruggen te slaan tussen deze disciplines.

De problemen van de *kaduke weegschaal* en van de *drijvende en zinkende doosjes* kunnen in de tweede graad al behandeld worden. Voor de problemen van de *hobbelerende bierviltjes* en van de *ronde biljarttafel* is wat meer kennis van de goniometrie en ook meer (ruimtelijk) inzicht nodig. Hiervoor mikken we op een doelpubliek van het einde van de tweede en het begin van de derde graad. Het laatste probleem, *de wedstrijd pirouetten draaien*, is bedoeld voor het zesde jaar. Hier wordt er vooral gewerkt aan inzicht bij het opstellen van integraalformules die verder gaan dan de klassieke oppervlakte- en inhoudsformules voor omwentelingslichamen.

### Inplanning?

Wanneer neem je oefeningen en projecten uit deze loep op in je lessen? Eén regel: als je leerlingen geïnteresseerd zijn in wetenschappen en je

wilt wat afwisseling met de oefeningen binnen de wiskunde zelf, dan kun je een deeltje van deze loep inzetten.

De problemen zijn ook breed genoeg om ze in te schakelen bij de onderzoekscompetenties. Als je deze keuze maakt, moet je natuurlijk een andere werkvorm zoeken. Leg de werkteksten dan aan de kant en vervang ze door een open vraagstelling.

## 2. De kaduke balans

Dit eerste project is geschikt voor leerlingen die al iets weten over functies en hun grafieken. Ook het oplossen van stelsels en van vierkantsvergelijkingen moet gekend zijn voor deze toepassing. Als fysische achtergrond wordt er enkel gesteund op de hefboomwet: last maal last-arm is macht maal machtarm.

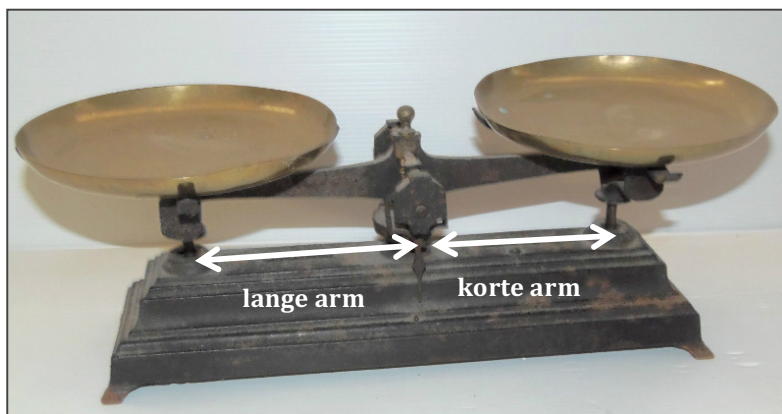
De toepassing van de kaduke balans is bijgevolg geschikt voor leerlingen uit een vierde jaar. Het kan ook voor jongere leerlingen maar dan moet de vraag met de vierkantsvergelijking (de laatste in de onderstaande werktekst) geschrapt worden.

In de werktekst hieronder proberen we een fysisch probleem te modelleren met weinig wiskundige hulpmiddelen. Er wordt nagedacht over het gebruik van variabelen en over de interpretatie van grafieken. De werktekst put het probleem echter niet helemaal uit. Wie nog verder wil gaan, kan bijvoorbeeld als toemaatje bewijzen dat het rekenkundig gemiddelde van twee getallen (hier: de geschatte massa van een pompoen) steeds groter is dan het meetkundig gemiddelde van deze getallen (hier: de werkelijke massa van de pompoen).

begin lesactiviteit

### De kaduke balans

Een pompoenkweker heeft een gietijzeren balans in zijn serre staan waarop hij zijn koopwaar weegt wanneer omwonenden pompoenen komen kopen. De oude balans heeft twee schalen: eentje waarop de pompoen gelegd wordt en eentje voor de gietijzeren tegengewichten. De balans werd ooit hersteld na een armbreuk. Sindsdien zijn de armen niet meer even lang en is de weging ook niet meer correct.



De pompoenhandelaar heeft hier iets op gevonden. Hij weegt de pompoen eerst in de linkerschaal en legt de tegengewichten in de rechterschaal. Daarna weegt hij de pompoen in de rechterschaal en de tegengewichten in de linkerschaal. Zo verkrijgt hij twee foute gewichten voor de pompoen. Hiervan neemt hij het rekenkundig gemiddelde. Handig, niet?

1. Stel dat de pompoen met een massa van  $p$  kg aan de ene kant van de balans 4 kg weegt en aan de andere kant 9 kg. Doet de pompoenboer dan winst of verlies met zijn weegmethode? Hoeveel dan?

*Als de hefboomwet door de leerlingen niet gekend is, moet die even herhaald worden. Er moeten ook letters ingevoerd worden voor de variabelen. Neem bijvoorbeeld  $l$  als afkorting voor de lengte van de lastarm en  $m$  voor de lengte van de machtarm. De onbekende massa van de pompoen wordt voorgesteld door  $p$  (zoals*

in de vraagstelling). De evenwichtsvergelijking is dan  $p \cdot l = 4 \cdot m$  bij de eerste weging en  $9 \cdot l = p \cdot m$  bij de tweede weging. Zowel aan de eerste als aan de tweede vergelijking moet voldaan zijn. We vinden dus het stelsel:

$$\begin{cases} p \cdot l = 4 \cdot m \\ 9 \cdot l = p \cdot m \end{cases}$$

dat met de gebruikelijke methoden op te lossen is. Je kunt uit de eerste vergelijking de variabele  $l$  afzonderen en die in de tweede substitueren. Daarna deel je beide leden door  $m$ , enz. Maar er is een kortere weg: deel de twee vergelijkingen lid aan lid door elkaar. Je vindt dan meteen dat

$$\frac{p}{9} = \frac{4}{p}$$

waaruit volgt dat  $p$  gelijk is aan 6. De pompoen weegt 6 kg maar hij wordt verkocht alsof hij  $\frac{4+9}{2} = 6,5$  kg zou wegen. De pompoenboer heeft gefoefeld. Hierdoor heeft hij een voordeel van een halve kilogram pompoen.

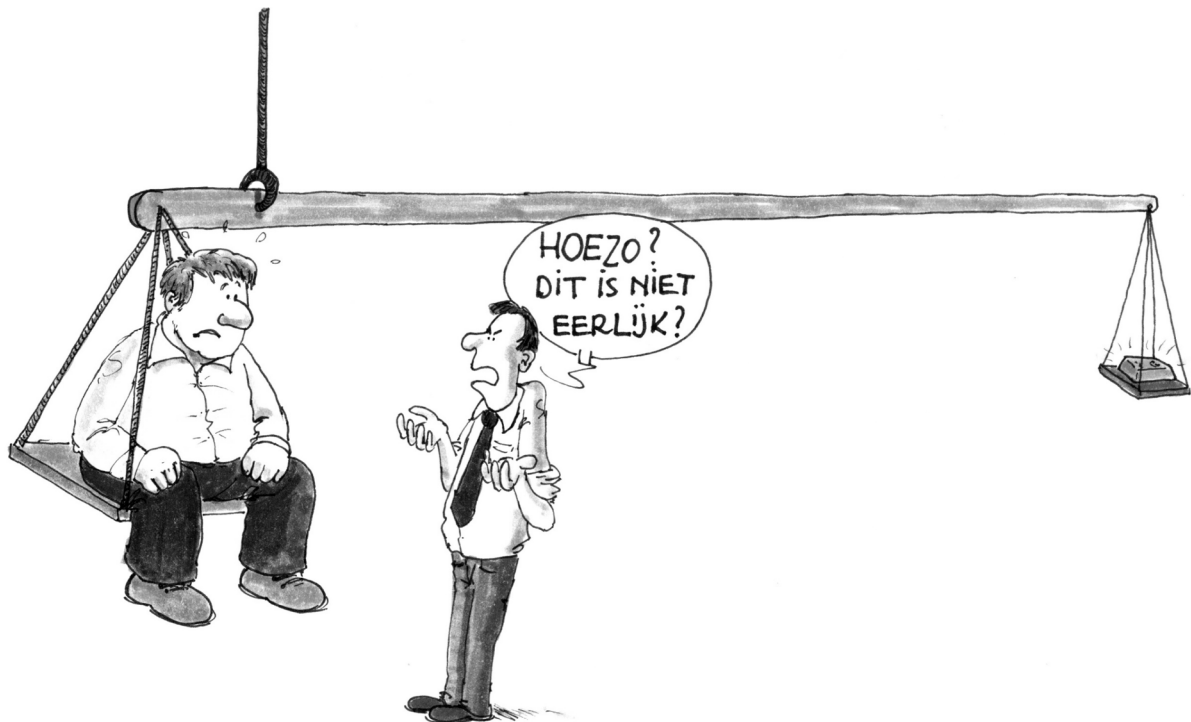
Voor het vervolg van dit onderzoek doen we afstand van de weegresultaten uit vraag 1. We onderzoeken nu stap voor stap of de pompoenenteler altijd winst maakt of dat hij soms ook verlies maakt met zijn weegtechniek.

2. Welke variabelen kun je best invoeren?

*De gewogen massa's van 4 kg en 9 kg moeten vervangen worden door letters. We kunnen ze bijvoorbeeld gelijkstellen aan  $w_1$  en  $w_2$ . De werkelijke massa van de pompoen mag behouden blijven in de variabele  $p$ .*

3. Zoek een uitdrukking voor de massa die de boer aanrekent aan de klant. De formule die je vindt, moet in functie van  $p$  geformuleerd worden.

*Deze massa is gelijk aan  $\frac{w_1+w_2}{2}$ . Maar in deze formule komt de parameter  $p$  niet voor. Net zoals in deel 1 moeten we gebruik maken van de evenwichtsvergelijkingen:*



$$\begin{cases} p \cdot l = w_1 \cdot m \\ w_2 \cdot l = p \cdot m \end{cases}$$

We gebruiken deze vergelijkingen om  $w_1$  en  $w_2$  te berekenen:  $w_1 = p \cdot \frac{l}{m}$  en  $w_2 = p \cdot \frac{m}{l}$ . Na substitutie in de formule voor de geschatte massa van de pompoen vinden we:  $\frac{p}{2} \cdot \left(\frac{l}{m} + \frac{m}{l}\right)$ .

In deze formule staan drie onbekenden. Dat is te veel om een makkelijke analyse te kunnen doen. De breuk  $\frac{l}{m}$  komt twee keer voor: een keer gewoon en een keer omgekeerd. Daarom nemen we best een verkorte notatie voor deze breuk.

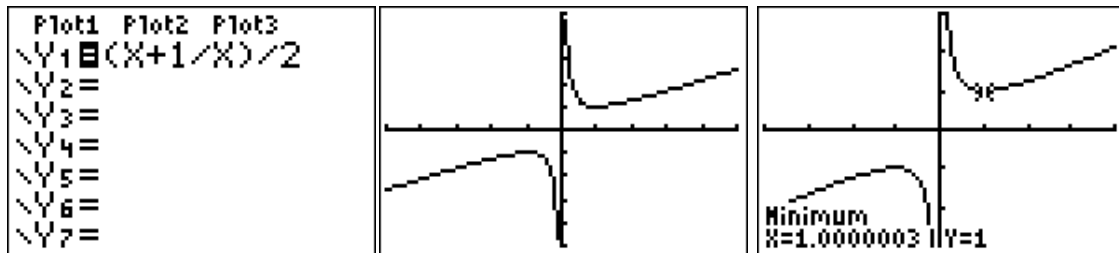
4. Vervang de verhouding van de lengten van de twee armen van de balans door de variabele  $x$ . Geef nu het voorschrift van de functie  $f(x)$  voor de aangerekende pompoenmassa in functie van de variabele  $x$ .

Het voorschrift is  $f(x) = \frac{p}{2} \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) = p \cdot \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x}\right)$ .

Het voorschrift van de aangerekende pompoenmassa is van de vorm 'p · factor'. Als deze 'eerlijkheidsfactor' gelijk is aan 1 dan is de weegmethode correct. Als deze factor groter is dan 1 dan heeft de pompoenteler gesjoemeld. We moeten dus het verloop van de 'eerlijkheidsfactor' onderzoeken om uit te maken of de teler eerlijk was.

5. Teken met je grafische zakrekenmachine de grafiek van de eerlijkheidsfactor  $g(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x}\right)$  en zoek een benadering van het minimum van deze functie.

De volgende screenshots laten zien dat er een minimum ligt in de buurt van  $x = 1$ . Alleen het gedeelte van de grafiek waarvoor  $x > 0$  is hier van belang. We zijn niet helemaal zeker van dit minimum want de grafische zakrekenmachine geeft slechts een benadering. De afronding van de zakrekenmachinebenadering  $x = 1,0000003$  naar  $x = 1$  is een speculatieve gok.



6. Interpreteer je resultaat.

Als de verhouding van de twee armen gelijk is aan 1 (dit wil zeggen dat de armen even lang zijn en dat de weegschaal geen constructiefout heeft), dan is de eerlijkheidsfactor gelijk aan 1. In alle andere gevallen is de eerlijkheidsfactor groter dan 1. De pompoenboer doet dus altijd winst als de armen van de balans ongelijk zijn. Deze conclusie is onafhankelijk van de massa van de verkochte pompoen en onafhankelijke van het lengteverschil tussen de twee armen.

7. We zijn niet helemaal zeker of de grafische benadering van de zakrekenmachine mag vertrouwd worden. Toon aan dat eerlijkheidsfactor niet een ietsiepietsie kleiner kan zijn dan 1. Voor deze vraag is het nuttig dat je vierkantsvergelijkingen kan oplossen. Heb je dit nog niet geleerd dan mag je deze eindvraag overslaan.

Stel dat de aangerekende massa een ietsiepietsie minder is dan 1, bijvoorbeeld 0,99. Dan moet er een  $x$ -waarde bestaan waarvoor

$$\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0,99.$$

Door beide leden te vermenigvuldigen met  $2x$  en daarna  $1,98x$  af te trekken van beide leden (we noemen deze techniek de balansmethode ☺) vinden we de vierkantsvergelijking:

$$x^2 - 1,98x + 1 = 0.$$

*Deze vergelijking heeft geen oplossing want de discriminant  $1,98^2 - 4$  is kleiner dan nul. Ook als we het ietsjepietsie nog wat kleiner nemen (dus als de beeldwaarde in het minimum nog wat dichterbij 1 ligt) vinden we een negatieve discriminant.*

einde lesactiviteit

### Toemaatje

In klassen die nog wat dieper op dit probleem willen ingaan, kun je een algebraïsche oplossingsmethode aanreiken, die geen gebruik maakt van het verloop van functies.

Als we de twee gewogen massa's opnieuw  $w_1$  en  $w_2$  noemen dan kunnen we stellen dat de pompoenteler de pompoen verkoop tegen een fictieve massa van  $\frac{w_1+w_2}{2}$  kg. Deze massa is het rekenkundig gemiddelde van de twee gegeven massa's. Opnieuw door het oplossen van een stelsel kunnen we berekenen dat de reële massa  $p$  van de pompoen gelijk is aan  $\sqrt{w_1 \cdot w_2}$ . Deze massa is het meetkundig gemiddelde (of de middelevenredige) van de twee gegeven massa's.

Laat de leerlingen vervolgens het meetkundig gemiddelde,  $mg(a, b)$ , en het rekenkundig gemiddelde,  $rg(a, b)$ , berekenen van enkele getallenparen  $(a, b)$ . Ze ontdekken snel dat

$$mg(a, b) \leq rg(a, b).$$

De ongelijkheid is een gelijkheid als en slechts als de twee getallen,  $a$  en  $b$ , gelijk zijn. Als deze ongelijkheid is aangetoond, dan is het duidelijk dat de teler altijd winst doet, tenzij de twee wegen gelijk zijn.

Het bewijs van de ongelijkheid kan best klassikaal gebeuren. Voor ons een makkie, voor de leerlingen meer dan moeilijk genoeg.

$$\begin{aligned} mg(a, b) &\leq rg(a, b) \\ \Leftrightarrow \sqrt{ab} &\leq \frac{a+b}{2} \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} &\leq a+b \\ \Leftrightarrow 4ab &\leq a^2 + 2ab + b^2 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq a^2 - 2ab + b^2 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq (a-b)^2 \end{aligned}$$

De ongelijkheid van het meetkundig en het rekenkundig gemiddelde kadert in een groter geheel waarin ook het harmonisch gemiddelde,  $hm(a, b)$ , en het kwadratisch gemiddelde,  $kg(a, b)$ , ter sprake komen:

$$hg(a, b) \leq mg(a, b) \leq rg(a, b) \leq kg(a, b).$$

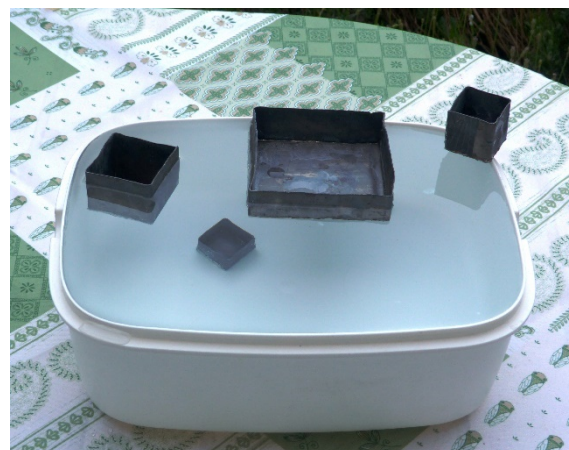
Eventueel kun je hier ook nog iets over kwijt in de les. Of dit nuttig is, weet je maar nooit. Misschien kunnen je leerlingen hun leerkracht Frans de

volgende keer overhalen om de het kwadratisch gemiddelde van een toets en een herkansingstoets op het maandrapport te laten meetellen in plaats van het rekenkundig gemiddelde.

## 3. Drijvende en zinkende doosjes

### Inleiding

Allerlei loden bakjes met vierkant grondvlak worden in een bak met water losgelaten. De bakjes hebben verschillende afmetingen: grote of kleine grondvlakken, hoog of laag. Welke gaan drijven?



Figuur 1

We leerden deze opgave kennen op het feestsymposium voor de 40-ste verjaardag van de GEM, Groupe d'Enseignement Mathématique, waar de drijvende bakjes het onderwerp vormden van een workshop door Mariza Krysinska. Wij baseerden ons in grote mate op Krysinska, 2017 en Krysinska, 2011, waarvoor we Mariza hartelijk bedanken. Mariza zelf ontleende het idee van Chevallard, 1989.

Het is best om de loden bakjes echt in de klas te hebben, zodat het experiment kan worden uitgevoerd. Wiskundig is dit niet essentieel, maar het draagt bij tot het 'onvergetelijke' karakter van de les. Wij kochten een opgerolde loden plaat van 1 m bij 30 cm en 0,75 mm dik bij de doe-het-zelfzaak Gamma. Voor het wegen, het snijden (met een speciale schaar) en het lassen van de



bakjes, heb ik mijn collega techniek ingeschakeld (dank je wel, Benoit).

### Voorkennis fysica

Deze opgave steunt op de wet van Archimedes, bekend van de legendarische badscène waarna hij volgens de legende naakt de straat opliep terwijl hij ‘*Ἔβρηκεν*’ uitriep (“Ik heb het gevonden”, in het Dorisch Grieks). De wet zegt: een badeend of ander voorwerp dat je in het water legt, ondervindt een opwaartse kracht gelijk aan het gewicht van het door dit voorwerp verplaatste water. Als het voorwerp drijft, zijn er twee krachten in evenwicht: de opwaartse kracht van Archimedes en het gewicht van het voorwerp. ‘Gewicht’ is massa maal  $g$  (met  $g \approx 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ). Voor een drijvend voorwerp geldt dus:

$$m_{\text{voorwerp}} \cdot g = m_{\text{verplaatste water}} \cdot g.$$

Door de factor  $g$  te schrappen, krijgen we een formulering met enkel massa’s. Voor een drijvend voorwerp geldt:

$$m_{\text{voorwerp}} = m_{\text{verplaatste water}}$$

Naast deze wet van Archimedes is er nog een tweede fysicabegrip nodig voor deze opgave: de *oppervlaktemassadichtheid* van de loden plaat waaruit de bakjes vervaardigd zijn. Gewone massadichtheid is massa per volume-eenheid, maar omdat de plaat een vaste dikte heeft, werken we hier met oppervlaktemassadichtheid: massa per oppervlakte-eenheid.

Hiermee is alles gezegd over de natuurkundige achtergrond voor deze opgave. Verder gaat de opgave vooral over wiskunde: het functiebegrip, eerstegraadsfuncties, homografische functies, vergelijkingen, ongelijkheden... Hieronder wisselen we klassikale besprekingen en experimenten af met opdrachten voor korte groepsworkshops.

### Het probleem

Uit een loden plaat met een oppervlaktemassadichtheid van  $0,86 \text{ g/cm}^2$  zijn dertien balkvormige bakjes zonder deksel gemaakt. De grondvlakken zijn vierkanten. De bakjes zijn leeg (of eerder: ze bevatten lucht). Hieronder zie je de afmetingen  $z \times z \times h$  van de bakjes, met  $z$  de zijde van het grondvlak in cm en  $h$  de hoogte in cm.

$3 \times 3 \times 2$	$5 \times 5 \times 2$
$3 \times 3 \times 3$	$5 \times 5 \times 3,5$
$3 \times 3 \times 5$	$5 \times 5 \times 5$

$3,5 \times 3,5 \times 2$	$5 \times 5 \times 8$
$3,5 \times 3,5 \times 3,5$	$10 \times 10 \times 1,5$
$3,5 \times 3,5 \times 8$	$10 \times 10 \times 3$
	$10 \times 10 \times 10$

Welke van deze bakjes zullen drijven en welke zullen zinken als we die voorzichtig op het wateroppervlak loslaten?

### Eerste klassikale verkenning

Omdat de vraag gesteld wordt, betekent het wellicht dat ze niet allemaal zullen drijven of allemaal zullen zinken. Hebben kleine bakjes meer kans om te drijven dan grote? Of is het net omgekeerd? Leerlingen kunnen alvast argumenten of hypothesen aanbrengen, bijvoorbeeld:

- De kleine bakjes zijn minder zwaar en gaan dus gemakkelijker drijven.
- Maar grote schepen drijven ook. Ze bevatten binnenin meer lucht. Misschien moet een bakje ruim genoeg zijn om te drijven.
- Zouden de kubusvormige bakjes een belangrijke rol spelen? Zijn dit misschien de grensgevallen tussen drijven en zinken?

Als het materiaal in de klas aanwezig is, kun je het nu uittesten en verschillende bakjes voorzichtig op het wateroppervlak van een bak water leggen.

Hierbij kun je starten met twee bakjes waarvan je denkt dat het ene zeker zal drijven en het andere zeker zal zinken. Ondertussen vraag je je af: als een bakje met een gegeven grondvlak niet drijft, kun je dan beter de hoogte verkleinen of vergroten om het te laten drijven? Als je de hoogte verkleint, wordt het bakje lichter, maar tegelijkertijd wordt ook het volume kleiner. En volgens de wet van Archimedes wordt de opwaartse kracht bepaald door het volume van het verplaatste water...

De kubussen blijken niet de grens te vormen tussen drijven en zinken. Als je systematisch de verschillende gegeven families van bakjes uittest, stel je vast dat alle bakjes met een klein grondvlak zinken, ongeacht hun hoogte, dat alle bakjes met een groot grondvlak drijven en dat van de andere enkel de bakjes drijven die hoog genoeg zijn. Hoe kleiner het grondvlak, hoe groter de hoogte moet zijn opdat het bakje zou drijven.

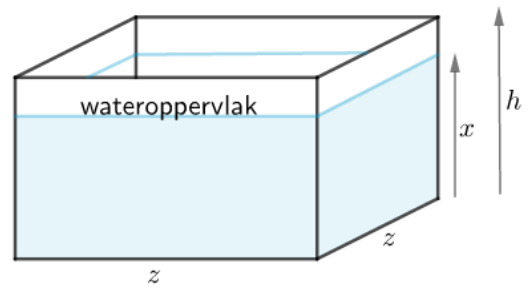
Dit levert nieuwe vragen op.

- Kunnen we een bakje met een grondvlak van  $3 \times 3$  laten drijven door die hoog genoeg te maken?
- Blijft een bakje met een grondvlak van  $10 \times 10$  altijd drijven, hoe klein we de hoogte ook maken?

### Een wiskundig model

Uit de wet van Archimedes volgt dat de massa van het drijvende bakje gelijk is aan de massa van het verplaatste water.

In figuur 2 is een drijvend bakje voorgesteld. Het getekende water zit buiten het bakje; binnen het bakje is lucht (anders zou het niet drijven). Noem  $x$  de hoogte in cm van het gedeelte dat bij drijven ondergedompeld is. De massa van het verplaatste water, met de eenheden in het grijs, is:  $z^2 x \text{ cm}^3 \cdot 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = z^2 x \text{ g}$ . De massa van het bakje is  $(z^2 + 4hz) \text{ cm}^2 \cdot 0,86 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2} = 0,86(z^2 + 4hz) \text{ g}$ .



Figuur 2 Het drijvende bakje

Om te drijven moeten beide gelijk zijn, dus:

$$z^2 x = 0,86(z^2 + 4hz).$$

Merk op dat we bij deze berekening de dikte van de loden plaat verwaarloosd hebben. We maakten geen onderscheid tussen de oppervlakte aan de buitenkant van het bakje en aan de binnenkant.

Steunend op dit model kunnen de leerlingen in de volgende lesactiviteit wiskundig uitzoeken welke bakjes drijven en welke niet. In deze activiteit bouwen we verder op het pas opgestelde wiskundige model.

begin lesactiviteit

## Welke bakjes gaan drijven?

Bij een drijvend bakje zonder deksel van afmetingen (in cm)  $z \times z \times h$ , waarbij de hoogte van het ondergedompelde deel  $x$  cm is, geldt:

$$z^2 x = 0,86(z^2 + 4hz).$$

1. Aan welke voorwaarde moeten  $x$  en  $h$  voldoen opdat het bakje drijft?

*Het is duidelijk dat de hoogte van het ondergedompelde deel kleiner moet zijn dan de hoogte van het bakje. Dus:  $x < h$ . Je kunt discussiëren over de vraag of het  $x < h$  moet zijn of  $x \leq h$ , maar in de praktijk maakt dit geen verschil.*

2. Welke dozen van de 'familie'  $z = 3$  drijven?

*Voor de dozen van de familie  $z = 3$  vinden we  $9x = 0,86(9 + 12h)$ , of nog:  $x = 0,86 + 1,1467h$ . De voorwaarde  $x < h$  geeft:*

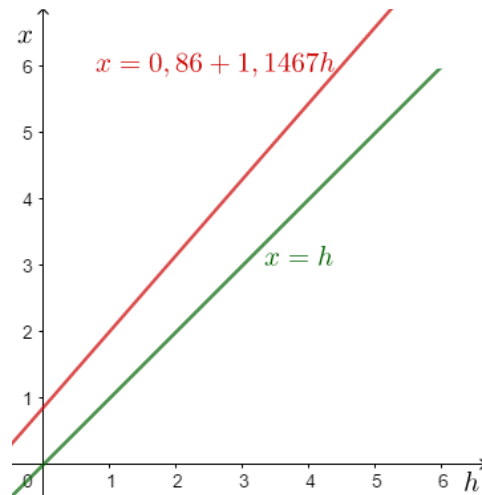
$$0,86 + 1,1467h < h.$$

*Deze voorwaarde is voor geen enkele (positieve) waarde van  $h$  voldaan. Geen enkel van deze bakjes zal drijven.*

*Dit resultaat kan grafisch geïnterpreteerd worden: de grafieken van de functies  $x = 0,86 + 1,1467h$  en  $x = h$  hebben geen snijpunt in het eerste kwadrant (zie figuur op de volgende pagina).*



## Onder de loep



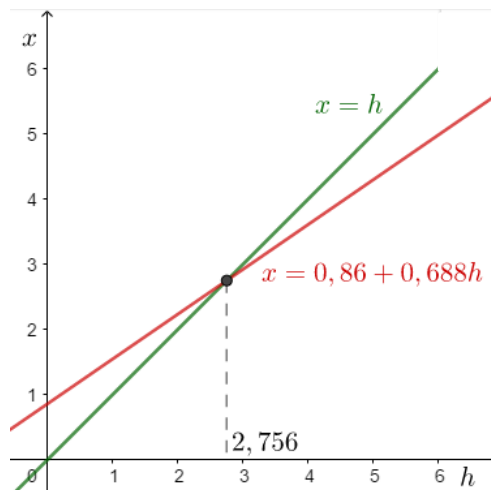
3. Zelfde vraag voor de familie  $z = 5$ .

Voor de dozen van de familie  $z = 5$  vinden we  $25x = 0,86(25 + 20h)$ , of nog:  $x = 0,86 + 0,688h$ . Dit geeft:

$$\begin{aligned}x < h &\Leftrightarrow 0,86 + 0,688h < h \\ &\Leftrightarrow h > 2,756 \dots\end{aligned}$$

De bakjes met een hoogte groter dan 2,756 ... zullen drijven.

Grafisch: de grafieken van de functies  $x = 0,86 + 0,688h$  en  $x = h$  snijden elkaar in het eerste kwadrant (figuur hieronder). De  $h$ -waarden rechts van het snijpunt komen overeen met drijvende bakjes.



4. Hoe zit het met de bakjes van de families  $z = 3,5$  en  $z = 10$ ?

Voor de familie  $z = 3,5$  vinden we als voorwaarde  $h > 50,166 \dots$  en voor de familie  $z = 10$  is de voorwaarde:  $h > 1,3109$ .

In de vorige vragen ontdekte je dat in sommige families geen enkel bakje drijft, terwijl in andere families sommige bakjes wel drijven en andere niet (afhankelijk van de hoogte).



5. Wat zijn de waarden van  $z$  waarvoor je geen enkel drijvend bakje kunt maken, wat ook de hoogte  $h$  mag zijn?

Voor een bakje met grondvlak met zijde  $z$  cm en hoogte  $h$  cm halen we uit  $z^2x = 0,86(z^2 + 4hz)$  dat  $x = 0,86 + \frac{3,44}{z}h$ . Dit geeft de drijfvoorwaarde

$$0,86 + \frac{3,44}{z}h < h.$$

Als de coëfficiënt van  $h$  in het linkerlid groter dan 1 is of gelijk aan 1, is het linkerlid altijd groter dan  $h$ , voor gelijk welke waarde van  $h$ , en dus drijft het bakje niet. Dit is het geval wanneer  $z \leq 3,44$ . Dus: als  $z \leq 3,44$  dan zinkt het bakje voor elke hoogte  $h$ . Maar als  $z > 3,44$ , dan geldt  $x < h$  als  $h$  groot genoeg is. Sommige bakjes zullen dan drijven.

We kunnen de drijfvoorwaarde ook grafisch interpreteren. Het snijpunt van de rechte met vergelijking

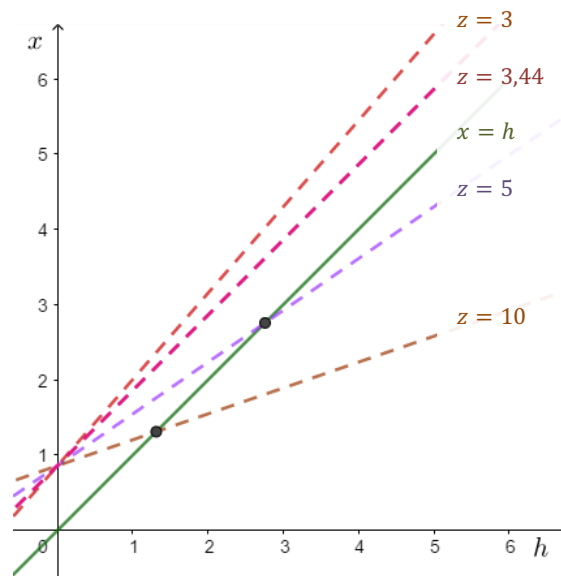
$$x = 0,86 + \frac{3,44}{z}h$$

(met  $z$  als parameter) en de rechte

$$x = h$$

kan enkel een positieve abscis hebben als  $z > 3,44$ , zoals je in de onderstaande figuur ziet, waarin grafieken van  $x = 0,86 + \frac{3,44}{z}h$  getekend zijn voor verschillende waarden van  $z$ .





Els beweert: zo'n bakje drijft op voorwaarde dat de 'gemiddelde massadichtheid' kleiner is dan  $1 \frac{g}{cm^3}$ , de massadichtheid van water. Met gemiddelde massadichtheid bedoelt zij de massa van het bakje gedeeld door het volume het bakje. De gemiddelde massadichtheid is m.a.w. de massadichtheid van een volle balk die dezelfde massa en hetzelfde volume zou hebben als het bakje.

6. Heeft Els gelijk?

De gemiddelde massadichtheid van het bakje is

$$\frac{m_{bakje}}{V_{bakje}} = \frac{0,86(z^2 + 4hz)}{z^2 h} = \frac{0,86(z^2 + 4hz)}{z^2} \cdot \frac{1}{h} = \frac{x}{h}$$

De voorwaarde van Els komt dus neer op  $\frac{x}{h} < 1$ . Dit is inderdaad equivalent met de voorwaarde  $x < h$ .

Een andere manier om dit uit te leggen steunt op de wet van Archimedes. Omdat het volume van het verplaatste water kleiner is dan het totale volume van het bakje, geldt:

$$\begin{aligned} m_{bakje} &= m_{verplaatste\ water} \\ \Rightarrow m_{bakje} &= V_{verplaatste\ water} \cdot 1 \frac{g}{cm^3} \\ \Rightarrow m_{bakje} &< V_{bakje} \cdot 1 \frac{g}{cm^3} \\ \Rightarrow \frac{m_{bakje}}{V_{bakje}} &< 1 \frac{g}{cm^3} \end{aligned}$$

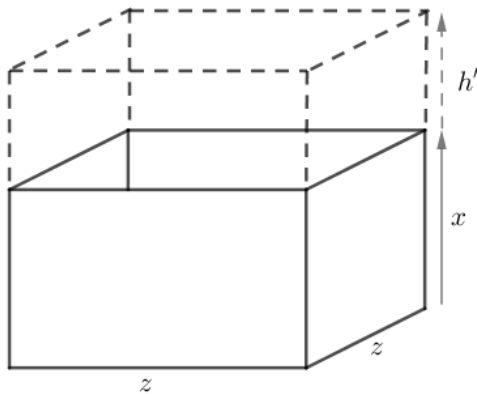
einde lesactiviteit

### Minimale zijde van het grondvlak met een fysische redenering

In de lesactiviteit ontdekten we dat geen enkel bakje met  $z = 3$  drijft, terwijl voor de families met  $z = 3,5$  of  $z = 5$  of  $z = 10$  sommige bakjes zinken (als de hoogte  $h$  te klein is) en andere bakjes drijven (als de hoogte  $h$  groot genoeg is). Tot dezelfde conclusie kom je met een fysische redenering. We plaatsen dit buiten de lesactiviteit omdat we denken dat de leerlingen hier niet uit

zichzelf aan denken. Het is wel interessant om dit nadien met hen te bespreken. Het is goed dat leerlingen beseffen dat wiskundige problemen meestal geen unieke oplossingsmethode hebben.

Als een bakje met grondvlak  $z \times z$  niet drijft, kan men proberen om het toch drijvend te maken door de hoogte met  $h'$  te laten toenemen zodanig dat het toegevoegde volume overeenkomt met een watermassa die groter is dan die van het toegevoegde lood (figuur 3).



Figuur 3

Het toegevoegde volume bedraagt  $z \cdot z \cdot h' \text{ cm}^3$ . Dit komt overeen met een watermassa van  $z \cdot z \cdot h' \text{ g}$ . De massa van het toegevoegde lood bedraagt  $0,86 \cdot 4z \cdot h' \text{ g}$ . We moeten dus  $z^2 h'$  vergelijken met  $3,44 zh'$ . Dit komt op hetzelfde neer als  $z$  vergelijken met  $3,44$ .

Als  $z > 3,44$  komt het vergroten van de hoogte neer op het toevoegen van een grotere massa aan verplaatst water dan aan lood. Door de hoogte genoeg te vergroten, kan men het bakje doen drijven. Als  $z = 3,44$  wordt de situatie niet verbeterd en ook niet verslechterd door de hoogte te laten toenemen. Als  $z < 3,44$  wordt de situatie verslechterd wanneer je de hoogte laat toenemen: er komt meer loodmassa bij dan massa van verplaatst water. Dus: alle bakjes met  $z \leq 3,44$  zinken, wat hun hoogte ook is.

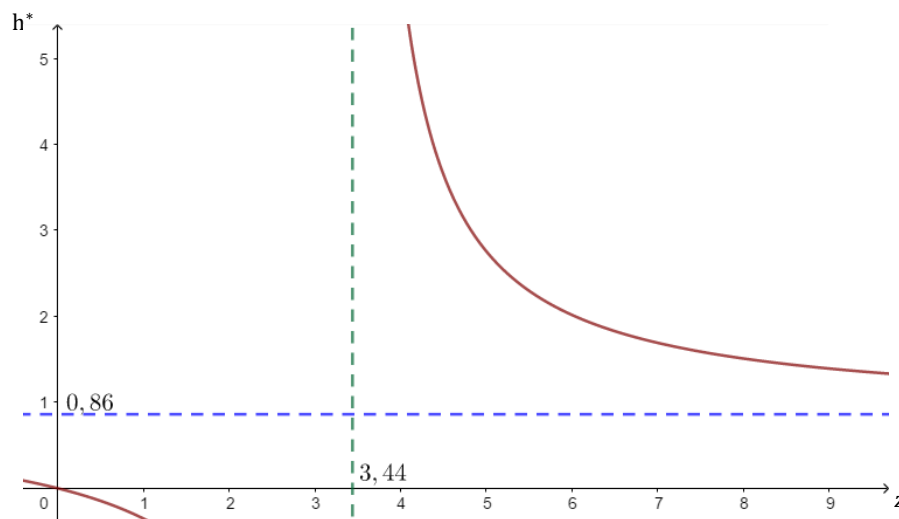
In de vorige lesactiviteit keken we vooral naar de zijde van het grondvlak. We werkten met eerstegraadsfuncties en we vonden de minimale zijde om een drijvend bakje te kunnen maken. Door de aandacht te richten op de minimale hoogte van een drijvend bakje, in functie van de zijde, verschijnt een homografische functie (een rationale functie waarbij teller en noemer eerstegraadsfuncties zijn). Het is mogelijk dat sommige leerlingen dit al gebruikt hebben bij de vorige lesactiviteit.

begin lesactiviteit

## Minimale hoogte voor een drijvend bakje

1. De minimale hoogte  $h^*$  opdat een bakje met vierkant grondvlak zou drijven, hangt af van de zijde van het grondvlak. Hoe groter het grondvlak, hoe kleiner de hoogte mag zijn. Maar: kun je drijvende bakjes maken die zo laag zijn als je wilt, als je het grondvlak maar groot genoeg maakt? Of is er een minimale hoogte waar je niet onder kunt?

Voor een bakje met grondvlak  $z \times z$  is de minimale hoogte  $h^*$  gegeven door de oplossing van de vergelijking  $h^* = 0,86 + \frac{3,44}{z} h^*$ . We hebben dus  $h^* = \frac{0,86z}{z-3,44}$ . De minimale hoogte hangt dus af van de waarde van  $z$ . Het verband is een homografische functie. Op de figuur hieronder zie je de grafiek van deze homografische functie. De zijde  $z$  van het grondvlak lees je af op de horizontale as. De minimale hoogte  $h^*$  van een drijvend bakje lees je af op de verticale as.



De verticale asymptoot  $z = 3,44$  is bepaald door de voorwaarde voor  $z$  om een drijvend bakje te kunnen maken (zie vorige lesactiviteit). De horizontale asymptoot  $h^* = 0,86$  is bepaald door de oppervlaktemassadichtheid van de loden plaat. De rechtersak van de functie is dalend; wanneer de zijde  $z$  toeneemt, nadert de minimale hoogte tot  $0,86$ . De hoogte onder dewelke geen enkele doos drijft is  $0,86$  cm.

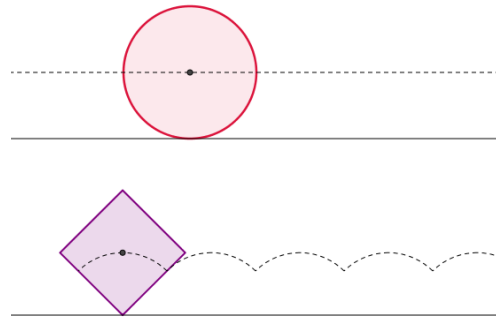
einde lesactiviteit

## 4. De hobbelende bierviltjes

Een muntstuk of een balletje dat je een klein duwtje geeft, blijft mooi rollen op een horizontaal vlak. Dat komt omdat het zwaartepunt van een cilinder of een bol tijdens het rollen op dezelfde hoogte blijft. Een 'vierkant muntstuk' zou niet rollen. Het heeft de neiging om te blijven staan in een positie waarbij het zwaartepunt zo laag mogelijk zit. Je kunt het wel forceren om te rollen; dan gaat het zwaartepunt op en neer (figuur 4). Op een aangepaste, niet vlakke, ondergrond is het wel mogelijk om een vierkant te laten rollen zodat het zwaartepunt even hoog blijft. Dit wordt in Technopolis (Mechelen) gedemonstreerd met een fiets met vierkante wielen. Maar dat is een ander verhaal.

In de volgende activiteit ontdekken leerlingen een ander voorwerp dat kan blijven rollen: twee schijven die loodrecht in elkaar gestoken zijn. Het

is bekend van een filmpje van Matt Parker op de website van Numberphile (Parker, 2014), die zijn inspiratie haalde bij Steward (1966).



Figuur 4 Baan van het zwaartepunt

We geven elk groepje leerlingen een aantal gelijke ronde bierviltjes. Na een inleiding door de leraar over ronde en vierkante wielen en de baan van het zwaartepunt (zie hierboven), starten ze met de lesactiviteit.

begin lesactiviteit

## Een hobbel met bierviltjes

Maak identieke gleuven in beide bierviltjes vanuit een punt van de rand in de richting van het middelpunt. Steek de schijven in elkaar, zodat ze haaks op elkaar staan in een gemeenschappelijk 'snijlijnstuk'. Het voorwerp dat je gemaakt hebt, wordt in het Engels 'wobble' genoemd. We zullen het verder een hobbel noemen.

1. Onderzoek of je de bierviltjes meer of minder in elkaar moet steken om de hobbel beter op het tafelblad te laten rollen. Wanneer je vindt dat hij goed rolt, maak je een filmpje van de rollende hobbel.

*Theoretisch moet de hobbel het best rollen als de afstand tussen de middelpunten van de schijven gelijk is aan  $\sqrt{2}$  maal de straal (zie verderop). Maar het experimentele aspect valt tegen. De leerlingen zullen enkel vaststellen – en dan nog – dat de hobbel minder goed rolt als de schijven veel te ondiep of veel te diep in elkaar steken.*



2. Waar ligt het zwaartepunt van de hobbel?

*Door symmetrie is dit in het midden van het snijlijnstuk. Of nog: het midden tussen de middelpunten van de schijven.*

We willen bepalen hoe 'diep' je beide schijven in elkaar moet steken om een goed rollende hobbel te maken, met andere woorden opdat de hoogte van het zwaartepunt ten opzichte van de tafel gelijk blijft. De straal van de bierviltjes noemen we  $r$ . De afstand tussen de middelpunten van de schijven van de hobbel noemen we  $a$ . De verhouding  $\frac{a}{r}$  bepaalt hoe diep de schijven in elkaar steken.

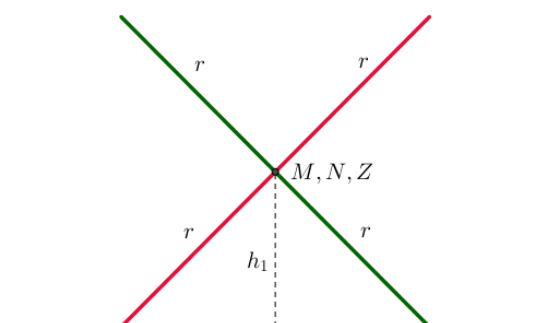
Als we de baan van het zwaartepunt konden bepalen, afhankelijk van  $a$ , dan zouden we kunnen uitdrukken dat die baan horizontaal moet zijn en op die manier  $a$  bepalen. Maar het is erg moeilijk om die baan te vinden. Daarom richten we onze aandacht op twee speciale 'standen' van de hobbel. Als het mogelijk is om een hobbel te maken waarbij het zwaartepunt altijd op eenzelfde hoogte blijft, dan moeten de hoogtes ook in deze twee speciale standen gelijk zijn. Maar omgekeerd geeft het feit dat deze twee speciale hoogtes gelijk zijn, nog geen garantie dat het zwaartepunt de hele tijd even hoog blijft. Dat dit nochtans wel het geval is, wordt bewezen in een Japans artikel (Saitoh, 2005).

De eerste speciale stand is de symmetrische stand, waarbij beide schijven even schuin staan ten opzichte van de tafel. Als je dan 'kijkt' (projecteert) in de richting van het snijlijnstuk (zodat je het snijlijnstuk als één punt ziet), dan zie je beide schijven als lijnstukken.

3. Neem een foto van de hobbel in deze stand. Maak ook een schets waarop je de middelpunten  $M$  en  $N$ , het zwaartepunt  $Z$  en de straal  $r$  aangeeft. Bereken de hoogte  $h_1$  van het zwaartepunt (in functie van  $r$  en  $a$ ).

*De hoogte  $h_1$  is de hoogte op de schuine zijde van een gelijkbenige rechthoekige driehoek met rechthoekszijden  $r$ , dus:*

$$h_1 = \frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

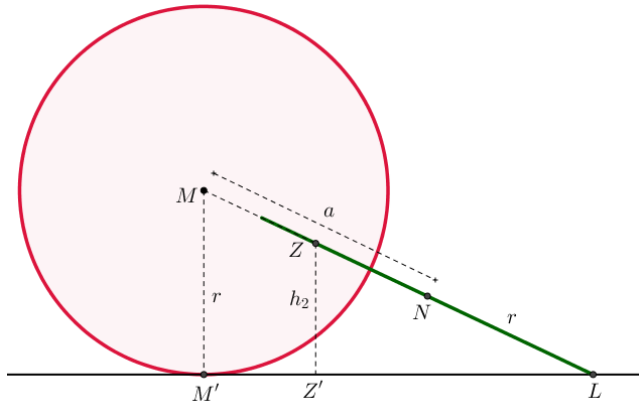


Een tweede speciale positie is wanneer één van de schijven verticaal staat. Als je deze schijf frontaal bekijkt, dan zie je echt een cirkel. De andere schijf, die daar loodrecht op staat, zie je dan als een lijnstuk.



## Onder de loep

4. Neem een foto van de hobbels in deze stand. Maak ook een schets waarop je de middelpunten, het zwaartepunt, de stralen en de afstand  $a$  tussen de middelpunten aanduidt. Bereken de hoogte  $h_2$  van het zwaartepunt (in functie van  $r$  en  $a$ ).



De driehoeken  $LMM'$  en  $LZZ'$  zijn gelijkvormig (hh). Dus geldt:

$$\frac{h_2}{r} = \frac{r + \frac{a}{2}}{r + a},$$

waaruit volgt

$$h_2 = \frac{r \left( r + \frac{a}{2} \right)}{r + a}.$$

5. Druk uit dat de hoogtes  $h_1$  en  $h_2$  gelijk moeten zijn en bepaal hiermee wat de afstand  $a$  tussen de middelpunten moet zijn (in functie van de straal  $r$  van de schijven). Vereenvoudig zoveel mogelijk.

Dit geeft:

$$\begin{aligned} h_1 = h_2 &\Leftrightarrow \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{r \left( r + \frac{a}{2} \right)}{r + a} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}(r + a) = 2 \left( r + \frac{a}{2} \right) \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{2} - 1)a = (2 - \sqrt{2})r \\ &\Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} - 1} r \\ &\Leftrightarrow a = \sqrt{2} r. \end{aligned}$$

De afstand tussen de middelpunten moet  $\sqrt{2}$  maal de straal zijn.

6. Maak nu een hobbels met de juiste afstand tussen de middelpunten.  
7. Welke van beide hoogtes is de grootste als  $a < \sqrt{2} r$ ? En als  $a > \sqrt{2} r$ ?

Dezelfde berekening als in vraag 5 kan ook met ongelijkheden in plaats van gelijkheden gebeuren. Omdat de factoren  $r + a$  en  $\sqrt{2} - 1$ , die van lid veranderd zijn in de berekening, positief zijn, geldt

$$h_1 < h_2 \Leftrightarrow a < \sqrt{2} r \quad \text{en} \quad h_1 > h_2 \Leftrightarrow a > \sqrt{2} r.$$

einde lesactiviteit

Als de afstand  $a$  tussen de middelpunten van de schijven juist gelijk is aan  $\sqrt{2} r$ , dan blijft de hobbels gewillig verder waggelen. Als  $a \neq \sqrt{2} r$ , dan zijn  $h_1$  en  $h_2$  de extreme waarden van de hoogte van het zwaartepunt. Dit is vanuit symmetrie te verwachten maar dit hebben we

eigenlijk niet bewezen. Wellicht staat dit ook in het Japans artikel (dat we niet gelezen hebben). Hieruit volgt dan: als de afstand  $a$  'te klein' is, dan is  $h_1$  het minimum (zie vraag 7 van de laatste werktekst) en heeft de hobbels de neiging om te blijven staan in de eerste speciale positie (de

symmetrische). Als  $a$  'te groot' is, is  $h_2$  het minimum en blijft de hobbel staan in de tweede speciale positie. In de praktijk is dit laatste moeilijk experimenteel vast te stellen. De twee schijven moeten perfect loodrecht op elkaar gemonteerd zijn, wat met bierviltjes slechts bij benadering mogelijk is. In het filmpje van Parker worden metalen (loden?) schijven gebruikt. Op [Mathcraft.wonderhowto.com](http://Mathcraft.wonderhowto.com) wordt uitgelegd hoe je het ding kunt maken met twee cd's. Redactielid Luc, handige wiskundeharry, maakte een hobbel van twee cd's met een minuscuul sneetje en, ja hoor, het bleef staan in de tweede speciale positie (figuur 5).



Figuur 5

## 5. De ronde biljarttafel

In deze paragraaf behandelen we een probleem van de vroegmiddeleeuwse wiskundige en astronoom Alhazen. Oorspronkelijk formuleerde Alhazen het probleem als een optisch vraagstuk, maar het kan net zo goed behandeld worden als een kinematisch vraagstuk in de context van een ronde biljarttafel. In deze loep werken we enkel de biljartvariant uit.

Leerlingen die zich over deze probleemstelling buigen, hebben bij de volgende opdrachten de kennis nodig van de goniometrie uit het vierde jaar en van rekenregels met vierkantswortels. Ook moet er op het einde een eenvoudige irrationale vergelijking opgelost worden. Strikt genomen komen deze vergelijkingen pas in het vijfde jaar aan bod en enkel als uitbreidingsleerstof (zie VVKSO-leerplan voor de zesurenrichtingen in ASO en TSO). Maar met een beetje hulp kan het ook in het vierde jaar.

Dit onderzoek is dus geschikt voor leerlingen op het einde van het vierde jaar of bij het begin van het vijfde jaar.

### Het biljartprobleem van Alhazen

We formuleren het biljartprobleem van Alhazen als volgt:

*Vanuit welke posities op een ronde biljarttafel kun je een biljartbal wegstoten zodanig dat hij na drie terugkaatsingen op de band weer op zijn beginpositie afstevent?*

Het is interessant om deze vraag een week voor de klassikale les als open probleem op te geven. Leerlingen met inspiratie vinden misschien wel een manier om dit proefondervindelijk uit te testen. Ze kunnen bijvoorbeeld een hoepel op tafel leggen met daarin een golfballetje. Ook al weet je dat deze proefopstelling gedoemd is te mislukken, laat je leerlingen maar wat ploeteren. Ze komen er wel achter dat de hoepel niet voldoende kan gefixeerd worden en dat hij te buigzaam is om de botsingen met het balletje te trotseren.

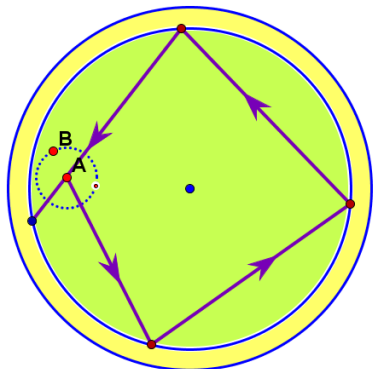
Via een dynamisch meetkundeprogramma kan wel een deel van de oplossing gevonden worden. Dit gaat als volgt. Plaats in een cirkelvormige afbakening een willekeurig punt  $A$ . Dit is het vertrekpunt van de biljartbal. Teken rond dit punt een klein cirkeltje waarop een variabel punt  $B$  ligt. Dit punt  $B$  duidt samen met  $A$  de richting aan waarin de biljartbal wordt weggespeeld. Door de posities van  $A$  en  $B$  te veranderen, kun je de biljartbal vanuit een willekeurig punt in een willekeurige richting wegspelen. Teken nu een aantal opeenvolgende lijnstukken die het pad van de biljartbal aangeven. Steun hierbij op de weerkaatsingswet: invallende en uitvallende paden zijn spiegelbeelden rond de normaal in het weerkaatsingspunt.

### Mogelijke resultaten van een experiment met een dynamisch meetkundeprogramma

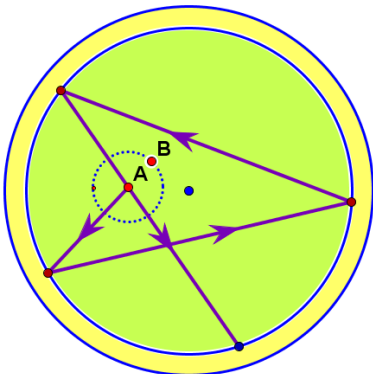
Door te spelen met de beginsituatie (startpositie  $A$  en startrichting volgens  $\overrightarrow{BA}$ ), kunnen de leerlingen een baan voor de biljartbal ontdekken die zich na drie bandstoten sluit. De baan kan vliegervormig zijn (zoals in figuur 6) maar ze kan ook pijlvormig zijn (zoals in figuur 7). Een pijl kan eventueel ook als een (concave) vlieger beschouwd worden. In dit geval is er geen verschil in naamgeving tussen de veelhoeken in figuur 6 en 7 maar wel in concaviteit.

Als er nauwkeurig geëxperimenteerd wordt, zal ook de overgangsfiguur tussen de vlieger en de pijl gevonden worden: de gelijkzijdige driehoek (zie figuur 8). Tot slot is een vierkant ook mogelijk (zie figuur 9).

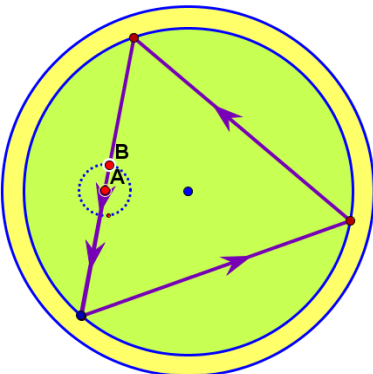
De vier onderstaande figuren worden uiteraard niet aan de leerlingen getoond. Ze verraden al een deel van de oplossing.



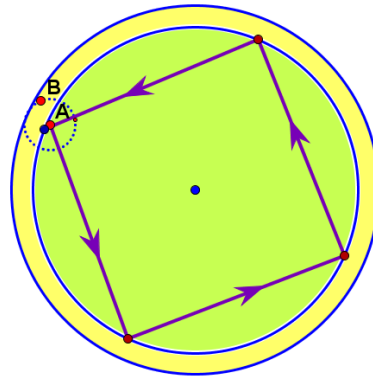
*Figuur 6 Een vliegvormige gesloten driebandstoot*



*Figuur 7 Een pijlvormige gesloten driebandstoot*



*Figuur 8 Een driehoekige gesloten driebandstoot*



*Figuur 9 Een vierkante gesloten driebandstoot*

Een bepaald gebied van de biljarttafel kan niet gebruikt worden als vertrekpunt voor een gesloten driebandstoot. Maar dat is moeilijker te ontdekken door experimenteren. Bij punten die erg dicht bij het middelpunt liggen, lukt het niet om een gesloten driebandstoot te maken. Zeer extreem: als de biljartbal helemaal in het midden ligt, zal er slechts een weerkaatsing op één band nodig zijn om de biljartbal weer op zijn beginpositie te krijgen.

Aangezien alle gegevens van het probleem (meer bepaald de vorm van de biljarttafel) draaisymmetrisch zijn, is ook de oplossing draaisymmetrisch. De biljarttafel kan verdeeld worden in ringen waarin elk fenomeen (vlieger, driehoek, pijl, vierkant, geen oplossing) van gesloten driebandspaden zich voordoet.

### Oplossing van het probleem in de klas

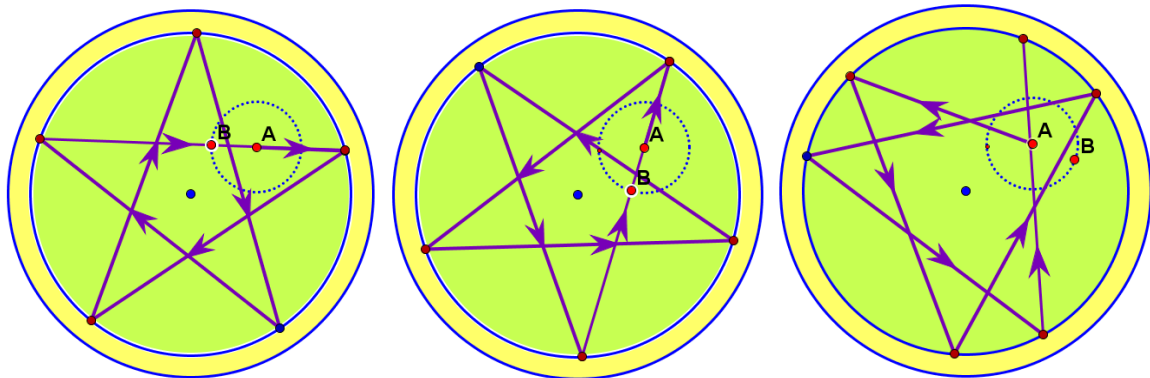
Via de volgende werktekst zetten we de leerlingen een eind op weg met het probleem van Alhazen. De eerste deelvraag is op te lossen met synthetische meetkunde (congruente driehoeken...), de andere deelvragen met analytische meetkunde (stelling van Pythagoras...). Het synthetische gedeelte is niet zo makkelijk omdat hier een bewijs uit het ongerijmde gevraagd wordt. Het lijkt ons aangewezen om de leerlingen hierin sterk te begeleiden. Ook op de redactie hadden we een heftige discussie over een mogelijk rechtstreeks bewijs. Helaas, elke poging voor een rechtstreeks bewijs stuitte op problemen.

Na de werktekst hebben we nog een historische toelichting over Abu Ali al-Hasan ibn al-Haytham voorzien die wat meer duiding geeft aan de leerlingen.

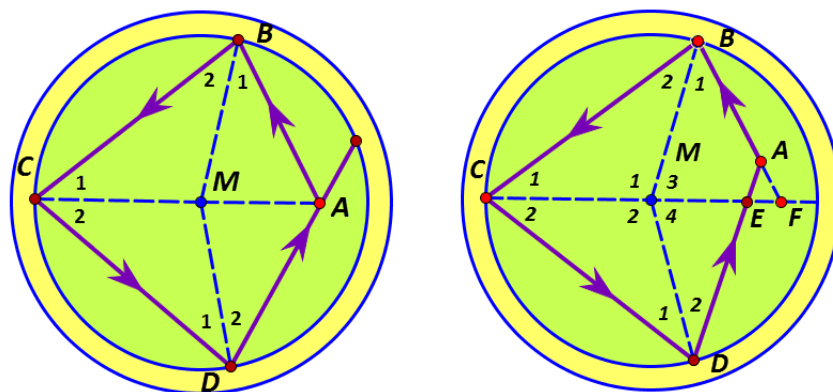


## Het probleem van de gesloten driebandstoot

Als je over een ronde biljarttafel beschikt met een nagenoeg wrijvingsloos biljartlaken en met een ideale band (die elke bal elastisch terugkaatst volgens de gekende terugkaatsingswetten), dan kun je ervoor zorgen dat een bal na een vijfbandstoot terug op zijn beginpositie afstevent. Vanaf de meeste beginpunten  $A$  zijn er zelfs verschillende richtingen  $\overrightarrow{BA}$  te vinden waaronder een bal kan weggestoten worden in een gesloten circuit met vijf terugkaatsingen op de band. Hieronder zie je voorbeelden van drie verschillende gesloten vijfbandstoten uit hetzelfde startpunt.



Als je hetzelfde trucje wilt uithalen met een driebandstoot dan is dit veel moeilijker. Vanuit sommige startpunten is het zelfs onmogelijk. We gaan in dit project op zoek naar alle plaatsen op het laken van een cirkelvormige biljarttafel van waaruit er een biljartbaan mogelijk is die zich sluit na drie bandstoten.



Op de bovenstaande figuur links is een vliegvormige biljartbaan getekend vanuit het punt  $A$ . De baan sluit na drie bandstoten en er is aan de weerkaatsingswet voldaan ( $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ ,  $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$  en  $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ ). Merkwaardig is dat het punt  $C$  precies op de rechte  $AM$  ligt, met  $M$  het middelpunt van de cirkel. Misschien lijkt dit voor jou evident maar voor een wiskundige is dit niet zo vanzelfsprekend. Deze uitspraak moet bewezen worden. De beste manier om dit te bewijzen is via een 'bewijs uit het ongerijmde'.

1. Stel dat  $C$  niet op de rechte  $AM$  ligt en dat de biljartbaan voor de rest aan alle fysieke eisen voldoet. Dan ligt het punt  $A$  niet op de rechte  $CM$ . Bewijs dat dit tot een contradictie leidt. Om tot een tegenspraak te komen, heb je hulppunten nodig: het punt  $E$  is het snijpunt van  $CM$  en  $DA$  en het punt  $F$  is het snijpunt van  $CM$  en  $BA$  (zie de bovenstaande figuur rechts). De punten  $E$  en  $F$  zijn verschillend. Als je nu kunt aantonen dat  $E$  en  $F$  gelijk moeten zijn, dan is het bewijs rond. Het uitgangspunt,  $C$  ligt niet op de rechte  $AM$ , is dan fout. Zo hebben we uit het ongerijmde bewezen dat  $C$  toch op de rechte  $AM$  ligt.

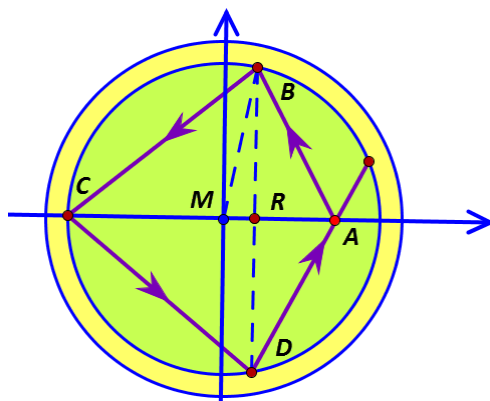
*We merken eerst op dat de zes weerkaatsingshoeken  $\hat{B}_1, \hat{B}_2, \hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{D}_1$  en  $\hat{D}_2$  gelijk zijn. Dit leiden we af uit de weerkaatsingswet en uit de gelijkbenigheid van de driehoeken  $BMC$  en  $CMD$ . In de driehoeken  $BMC$  en  $CMD$  zijn bijgevolg ook de derde hoeken in deze driehoeken gelijk:  $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ .*

De supplementen van de twee middelpuntshoeken  $\widehat{M}_1$  en  $\widehat{M}_2$  zijn bijgevolg ook gelijk. We hebben dus eveneens aangetoond dat  $\widehat{M}_3 = \widehat{M}_4$ .

Tot slot kunnen we nu bewijzen dat  $\triangle FMB \cong \triangle EMD$ . De driehoeken hebben een gelijke zijde ( $|BM| = |DM|$ ) en twee paar gelijke overeenkomstige hoeken ( $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_2$  en  $\widehat{M}_3 = \widehat{M}_4$ ). Hierdoor is bewezen dat de overeenkomstige zijden  $|ME|$  en  $|MF|$  gelijk zijn. Dit kan alleen het geval zijn als  $A$  op de rechte  $CM$  ligt en als de punten  $A, E$  en  $F$  samenvallen. Dit is in tegenspraak met de veronderstelling dat  $A$  niet op de rechte  $CM$  ligt. Hier eindigt het bewijs uit het ongerijmde.

Er is nog een belangrijk gevolg te formuleren. Uit de congruenties  $\triangle FMB \cong \triangle EMD$  en  $\triangle BMC \cong \triangle DMC$ , volgt dat ook  $|BA| = |DA|$  en  $|BC| = |DC|$ . De doorlopen vierhoek is dus een vlieger.

In het vervolg van deze werktekst zullen we met coördinaten rekenen. We kiezen een assenstelsel met de oorsprong in het middelpunt  $M$  van de biljarttafel zoals op de figuur hieronder. Door de symmetrie in de baan van de biljartbal is het aangewezen om een van de assen, bijvoorbeeld de  $x$ -as, op de rechte  $AC$  te kiezen. Zonder verlies van de algemeenheid kunnen we de straal van de biljarttafel gelijkstellen aan 1. Noem het snijpunt van de diagonalen van de vlieger  $R$ . Stel dat het beginpunt  $A$  coördinaten  $(x, 0)$  heeft en dat het punt  $R$  coördinaten  $(x', 0)$  heeft. In de opgaven hieronder wordt het verband gezocht tussen  $x$  en  $x'$ . Eens we dit verband gevonden hebben, kunnen we onderzoeken welke posities voor  $A$  een gesloten driebandstoot opleveren.



- Als je zonder verdere hulpvragen het verband tussen  $x$  en  $x'$  kunt vinden, moet je deze uitdaging niet uit de weg gaan en kun je na je zoektocht weer aanpakken bij vraag 6. Als je dit niet ziet zitten of als je in hopeloze berekeningen vastrijdt, kun je alle deelvragen vanaf vraag 3 bekijken.

In de berekeningen die volgen moet je zeker ergens gebruiken dat de hoek  $\widehat{CBM} = \widehat{MBA}$ . De gelijkheid van deze hoeken kan gebruikt worden om met de bissectricestelling in driehoek  $BAC$  een verband tussen de lengtes op te schrijven. Maar het kan ook met minder meetkundige voorkennis, bijvoorbeeld door gebruik te maken van de sinusregel (zie vraag 4). Als het verband tussen  $x$  en  $x'$  gevonden is, zoek je alle  $x$ -waarden waarvoor de waarde van  $x'$  in het interval  $[-1, 1]$  ligt (zie vraag 6). Zo vind je de mogelijke beginposities voor een gesloten pad met drie weerkaatsingspunten op de band van de biljarttafel.

- Zoek formules voor  $|AR|$ ,  $|BR|$ ,  $|CR|$ ,  $|AB|$  en  $|BC|$  in functie van  $x$  en  $x'$ .

Op de afbeelding lezen we af dat  $|AR| = |x - x'|$  en dat  $|CR| = 1 + x'$ . Met de stelling van Pythagoras berekenen we dat  $|BR| = \sqrt{1 - x'^2}$  en dat  $|AB| = \sqrt{1 - x'^2 + (x - x')^2} = \sqrt{1 + x^2 - 2xx'}$ . Nogmaals Pythagoras toepassen levert de laatste afstand op:  $|BC| = \sqrt{1 - x'^2 + (1 + x')^2} = \sqrt{2 + 2x'}$ .

- Stel een formule op voor  $\sin \widehat{CBM}$  en voor  $\sin \widehat{MBA}$  en stel deze sinussen aan elkaar gelijk. Welk irrationaal verband vind je dan tussen de variabelen  $x$  en  $x'$ ?

Als we twee keer de sinusregel toepassen vinden we dat  $\sin \widehat{CBM} = \frac{\sin \widehat{CMB}}{|CB|}$  en  $\sin \widehat{MBA} = \frac{|AM| \sin \widehat{BMA}}{|AB|}$ . Door de gelijkheid van  $\sin \widehat{CBM}$  en  $\sin \widehat{MBA}$  en door de gelijkheid van  $\sin \widehat{CMB}$  en  $\sin \widehat{BMA}$  (sinussen van supplementaire hoeken) vinden we dat  $|AB| = |AM| \cdot |BC|$ . Als we gebruik maken van de formules uit vraag 3 dan vinden we de irrationale vergelijking  $\sqrt{1 + x^2 - 2xx'} = x \cdot \sqrt{2 + 2x'}$ .

- Beschouw dit verband als een irrationale vergelijking in de onbekende  $x'$ . Los deze vergelijking op.

Uit de irrationale vergelijking volgt dat de parameter  $x$  steeds positief moet zijn. Beide leden van de vergelijking zijn dan positief en we kunnen dus beide leden kwadrateren zonder zorgen. Vervolgens nemen we de termen op een gepaste manier samen. We vinden dan dat  $(1+x)(1-x) = 2xx'(1+x)$ . De factor  $1+x$  kan niet 0 zijn. De vergelijking heeft bijgevolg één oplossing, namelijk  $x' = \frac{1-x}{2x}$ .

6. Bereken voor de gegeven afstanden  $x$  de bijbehorende afstanden  $x'$  en probeer uit deze tabel een eindconclusie af te leiden. Welke typische vormen voor een gesloten driebandstoot zijn er mogelijk? Is er vanuit elke beginsituatie een oplossing te vinden? Zijn er beginsituaties met meerdere oplossingen?

$x$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	1
$x'$											

De ingevulde tabel ziet er als volgt uit:

$x$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	1
$x'$	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	0

We besluiten dat er geen gesloten driebandstoot bestaat voor  $x \in ]0, \frac{1}{3}[$  omdat in dit geval  $x' > 1$ .

Als  $x \in ]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$  dan is  $x' > x$ . Dit betekent dat de vierhoek concaaf of pijlvormig is.

In het geval dat  $x \in ]\frac{1}{2}, 1[$  kunnen we een gesloten, convex pad hebben met drie hoekpunten op de band. De bijbehorende vliegervormige figuur werd eerder in deze werktekst getoond.

In het extreme geval dat  $x = 1$  zal het gesloten pad over de omtrek van een vierkant lopen. In het overgang geval met  $x = \frac{1}{2}$  is het gesloten pad een gelijkzijdige driehoek. En in het geval dat  $x = 0$  zal de gevonden oplossing niet bestaan omdat de noemer nul wordt. Er bestaan dan alleen gesloten éénbandstoten.

Elk beginpunt binnen de cirkelvormige biljarttafel geeft hoogstens één gesloten pad met drie weerkaatsingspunten op de band. Dat was niet zo bij de gesloten vijfbandstoten.

einde lesactiviteit

### Geschiedkundige achtergrond

De volledige naam van Alhazen is Abu Ali al-Hasan ibn al-Haytham. In het Westen verbasterden de vertalers al-Hasan tot Alhazen. Hij werd in 965 geboren in Basra (het huidige Irak) en stierf rond 1040, vermoedelijk in Caïro.

Niet minder dan 55 boeken van Alhazen zijn bewaard gebleven. Ze behandelden het toenmalige wereldbeeld, de banen van de zeven planeten, het vinden van de richting naar Mekka... Alhazens belangrijkste werk was de Opticae Thesaurus Alhazeni, een zeventalig traktaat over optica, waarin hij onder andere de werking van het oog beschreef.

In tegenstelling tot wat Euclides en Ptolemaeus beweerden, werden volgens Alhazen objecten niet waargenomen door een oog dat stralen uitzendt maar wel door een oog dat stralen opvangt. Alhazen was de eerste wetenschapper die durfde te spreken van een eindige lichtsnelheid en hij formuleerde ook verklaringen voor het ontstaan van regenbogen en halo's, voor bepaalde lichtfenomenen aan de horizon, voor eclipsen, enz.

Alhazen herformuleerde in zijn Opticae een oud probleem van Ptolemaeus:

*Gegeven een vast oogpunt en een vast voorwerp binnen een cirkelvormige spiegel, op welke plaats van de spiegelwand weerkaatst*

*de lichtstraal dan die het voorwerp zichtbaar maakt voor het oog?*

Hij loste dit probleem op door de constructie van kegelsneden. Er is echter nooit een passer-en-liniaalconstructie gevonden voor dit weerkaatsingspunt. Recent is aangetoond (in 1997 door P. M. Neumann) dat de constructie van het weerkaatsingspunt op de spiegel equivalent is met de constructie van derdemachtswortels, die ook niet kan uitgevoerd worden met passer en liniaal.

Het speciale geval van het probleem waarbij het oogpunt op de cirkelomtrek ligt en waarbij het verbindingslijnstuk van oog en object het middelpunt van de cirkel omvat, is eenvoudiger en is wel oplosbaar met passer en liniaal. Dit eenvoudiger vraagstuk hebben we in de context van een biljarttafel opgelost in de werktekst hierboven. Om het probleem van Alhazen hierin te herkennen, moet je naar de bovenste helft van de vlieger kijken.

## 6. Een wedstrijd pirouetten draaien

Stel dat je een wedstrijdje pirouetten draaien organiseert tussen kunstschaatsers. Wie heeft dan de grootste kans om het meeste omwentelingen te kunnen doen binnen een minuut? Het is duidelijk dat de deelnemer met de sterkste kuitspieren zich het beste kan afzetten en dat hij hierdoor een grotere draaikracht kan genereren.

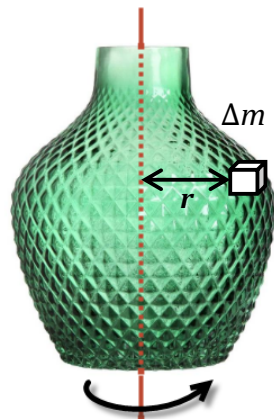
Als de spierkracht in de kuiten en de wrijving van de schaats met het ijs bij elke deelnemer dezelfde is, wordt er toch een verschil gemaakt door twee andere factoren. De vragen zijn dan: 'Wie heeft de kleinste massa?' en 'Wie kan zijn lichaamsmassa door een geschikte houding aan te nemen het beste concentreren rond de draaias?'. Deze twee factoren bepalen samen welke schaatser het minste weerstand heeft tegen een rotatiebeweging.

We kunnen deze weerstand tegen een draaibeweging theoretisch vastleggen met het begrip *traagheidsmassa*. Net zoals de *massa* van een lichaam een maat is voor de weerstand die een lichaam (onderhevig aan een verschuivingskracht) biedt tegen een versnelling, is de traagheidsmassa een maat voor de weerstand die een lichaam (onderhevig aan een rotatiekracht) biedt tegen een rotatieversnelling. Een theoretische uitleg over het begrip traagheidsmassa van een lichaam vind je achteraan deze paragraaf.

Traagheidsmassa's van een (niet noodzakelijk menselijk) lichaam kunnen wiskundig berekend worden. Dat gaat op de volgende manier.

Als je bijvoorbeeld een vaas wilt laten roteren rond een as en je wilt berekenen hoeveel weerstand ze zal bieden, moet je deze vaas (denkbeeldig) in gruzelementen slaan. In figuur 10 hebben we een gruzelement voorgesteld als een klein kubusje, maar het gruzelement mag ook een andere vorm hebben.





Figuur 10 Tollende vaas

Een ‘gruzelement’ is de Harry-Potter-variant op de meer wiskundige term ‘kleine grootheid’. Het is een grootheid die je zo klein kunt nemen als je zelf wilt. Zelfs een grootte van één molecule is toegestaan. Bij de uiteindelijke berekening van de traagheidsmassa (een limietberekening) worden deze kleine grootheden oneindig klein genomen. We spreken dan van ‘infinitesimale grootheden’.

De massa van een gruzelement noteren we als  $\Delta m$ , waarbij de letter ‘ $\Delta$ ’ laat zien dat het om een kleine grootheid gaat. Als we verderop een limietberekening maken, vervangen we de notatie  $\Delta m$  door  $dm$ . Vergelijk dit met de  $dx$  die we gebruiken bij de notatie voor afgeleiden en integralen.

De afstand van het gruzelement tot de draaias noteren we met de letter  $r$ , dus zonder  $\Delta$ . De traagheidsmassa van een gruzelementje wordt per definitie berekend met de formule  $r^2 \cdot \Delta m$ . Deze grootheid wordt uitgedrukt in  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ .

Als je de traagheidsmassa van de hele vaas wilt kennen, moet je een groot aantal van deze kleine traagheidsmassa’s optellen. Dat doe je met de formule:

$$\sum r^2 \cdot \Delta m.$$

Nemen we tot slot de limiet waarbij de gruzelementen oneindig klein worden, dan gaat deze som over in een integraal. Zo kom je tot de algemene formule voor de traagheidsmassa van een lichaam dat rond een as draait:

$$i = \int_M r^2 dm.$$

Normaal vind je bij een integraalteken een bovengrens en een ondergrens. Hier zijn deze grenzen vervangen door de letter  $M$  die aanduidt dat alle gruzelementen samen de volledige massa van de

vaas moeten omvatten. Indien er geen verwar- ring mogelijk is over de roterende massa  $M$  mag deze letter ook weggelaten worden.

Traagheidsmassa’s (of traagheidsmomenten) worden ook wel inertiemassa’s (of inertie- momenten) genoemd. Deze naamgeving verklaart de afkorting met de letter  $i$ .

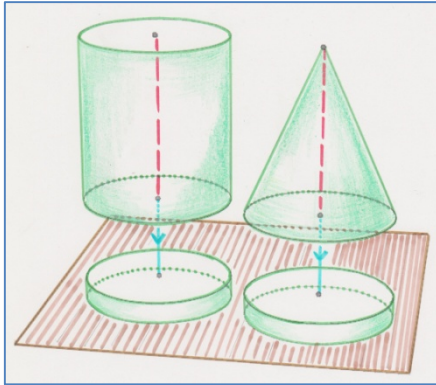
### 6.1. Zes deelnemers aan de wedstrijd

Voor ik in de les (over toepassingen op integraalrekening) begin met het berekenen van traagheidsmassa’s, beschrijf ik een speciale pirouettewedstrijd en vraag ik aan de leerlingen om de uitslag van deze wedstrijd te voorspellen. Er zijn zes deelnemers die op het eerste gezicht gelijkwaardig zijn: ze hebben dezelfde massa en dezelfde straal. De eerste drie zijn de massieve bol, kegel en cilinder en de volgende drie zijn de holle bol, kegel en cilinder. Bij deze laatste drie veronderstellen we dat de volledige massa op de oneindig dunne mantel ligt. Het gaat dus over theoretische lichamen die je enkel in de wiskundeshop kan kopen. Ik merk terloops op dat de drie massieve lichamen niet van hetzelfde materiaal kunnen gemaakt zijn: hun massa’s zijn gelijk maar hun inhoud is verschillend.

Ik probeer de klas ervan te overtuigen dat intuïtie in deze context onvoldoende is om de einduitslag van de pirouettewedstrijd te voorspellen. Er zullen zware berekeningen of nauwkeurige fysische experimenten nodig zijn om een zinvolle uitspraak te kunnen doen.

Toch kunnen er intuïtieve voorspellingen gedaan worden die zinvol zijn. De meeste leerlingen denken dat de holle cilinder het meeste weerstand biedt tegen een rotatie rond de as. En ze hebben gelijk. Alle moleculen van de uitgeholde cilinder liggen ver van de draaias. De massa van dit lichaam is dus niet geconcentreerd rond de as. De weerstand tegen tollen is zeer groot. De traagheidsmassa van de holle cilinder is bijgevolg ook zeer groot.

Er is nog meer te voorspellen maar daarbij hebben de leerlingen hulp nodig. Als je een rotatiesymmetrisch lichaam (dus geen vaas met oren) plattrapt in de richting van de rotatieas (lees: loodrecht projecteert op een vlak) dan verandert het traagheidsmoment niet. Alle moleculen van het lichaam behouden hun afstand tot de symmetrieas. Ook de massaverdeling van het lichaam ten opzichte van de (geprojecteerde) draaias is essentieel dezelfde gebleven...



Figuur 11 Holle kegel en volle cilinder onder de pletwals

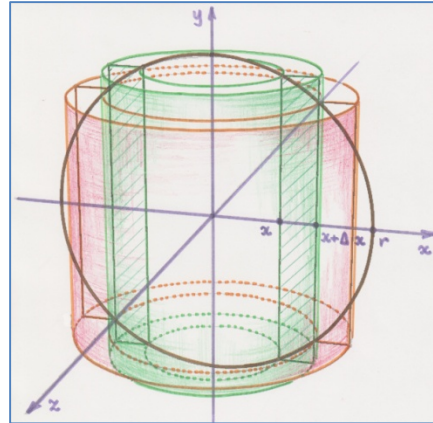
Bij de zes deelnemers aan de wedstrijd zijn er twee die platgetrapt kunnen worden tot hetzelfde object. Het zijn de volle cilinder en de holle kegel. Als je ze in de juiste richting projecteert op een vlak dan gaan ze over in een platte schijf met een uniforme massaverdeling. Denk even na over de uniformiteit van de massaverdeling. Bij de kegel is die iets minder evident.

De (oneindig dunne) schijf die ontstaat vanuit de volle cilinder is gelijk aan de schijf die ontstaat vanuit de holle kegel. De beide deelnemers hadden immers dezelfde straal. Zo kun je zonder één enkele integraal te berekenen aantonen dat er een ex aequo zal zijn in de ranking: de holle kegel en de volle cilinder.

### 6.2. Traagheidsmassa van massieve lichamen

Om de traagheidsmassa van een bol, die roteert rond een symmetrieas, te berekenen zijn verschillende vaardigheden nodig: het kiezen van de meest geschikte gruzelementen, het opstellen van een gepaste integraal, het redeneren met kleine grootheden (waardoor bijvoorbeeld  $(\Delta x)^2$  verwaarloosbaar wordt ten opzichte van  $\Delta x$ ), het nadenken over eenheden, de interpretatie van het eindresultaat... In de klas maak ik zulke berekening met de leerlingen voor de massieve bol. Een analoge berekening voor de traagheidsmassa van de massieve kegel en de massieve cilinder is werk voor thuis.

Gegeven is een bol met straal  $r$  (in meter), met massa  $m$  (in kilogram) en met massadichtheid  $\rho$  (in kilogram per kubieke meter). De bol tolt om een as die op de onderstaande tekening verticaal omhoog gericht is. We noemen deze as de  $y$ -as. De bol wordt beschreven door de grafiek van de functies  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  en  $g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$  te laten wentelen om de  $y$ -as.



Figuur 12 Bol gevuld met dunwandige cilinderschillen

De eerste opdracht is om kleine grootheden te kiezen waarvan in de limiet alle punten even ver van de rotatieas gelegen zijn. Je kunt hiervoor uiteraard kleine kubusjes nemen maar dat is voor het rekenwerk niet praktisch. De bol in zeer veel platte schijven snijden zoals bij een inhoudsberekening is ook niet goed. Verschillende punten van een schijf liggen immers op verschillende afstanden van de rotatieas.

In de klas duurt het een hele poos eer de leerlingen eraan denken om de bol op te vullen met cilinderschillen die in elkaar passen, in het midden dunne en hoge schillen, aan de buitenkant dikke en lage schillen. Neem de dikte van de cilinderwand gelijk aan  $\Delta x$ . Uit het voorschrift van de cirkel kun je afleiden dat de hoogte van de cilinder gelijk is aan  $2 \cdot f(x)$  of aan  $2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$ .

Vervolgens kan er een formule opgesteld worden voor de massa en de traagheidsmassa van één gruzelement. Hiervoor moet een omweg gemaakt worden via het volume en de massadichtheid van de bol.

In een van de stappen wordt er een benadering gemaakt die enkel correct is wanneer  $\Delta x$  zeer klein is. Alleen in dit geval is het kwadraat van  $\Delta x$  verwaarloosbaar ten opzichte van  $\Delta x$ . Denk bijvoorbeeld aan het getal  $\frac{1}{1000000}$  dat verwaarloosbaar is ten opzichte van  $\frac{1}{1000}$ . Zulke benaderingen zijn evident voor fysici. Maar in de wiskunde moeten ze grondig besproken worden.

Hieronder volgt de berekening voor de massa en de traagheidsmassa van een cilinderschil.

$$\begin{aligned}
\Delta m &= \rho \cdot \Delta V \\
&= \rho \cdot (V_{\text{buitencilinder}} - V_{\text{binnencilinder}}) \\
&= \rho \cdot ((x + \Delta x)^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot f(x) - x^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot f(x)) \\
&= \rho \cdot 2\pi \cdot f(x) \cdot ((x + \Delta x)^2 - x^2) \\
&= \rho \cdot 2\pi \cdot f(x) \cdot (x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x^2) \\
&\approx 4\pi\rho \cdot x \cdot f(x) \cdot \Delta x
\end{aligned}$$

$$= 4\pi\rho \cdot x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \Delta x$$

$$\Delta i = \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)^2 \cdot \Delta m$$

$$\approx \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot 4\pi\rho \cdot x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \Delta x$$

$$= \left(x^2 + x \cdot \Delta x + \frac{\Delta x^2}{4}\right) \cdot 4\pi\rho \cdot x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \Delta x$$

$$\approx 4\pi\rho \cdot x^3 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \Delta x$$

De totale traagheidsmassa vinden we door heel veel heel kleine traagheidsmassa's  $\Delta i$  te sommeren. In de limiet wordt deze som een integraal waarin  $x$  varieert van 0 tot  $r$ .

De onderstaande integraal is niet moeilijk manueel te berekenen na een tip van de leerkracht: gebruik een substitutie van de vorm  $u^2 = r^2 - x^2$ .

$$i = 4\pi\rho \int_0^r x^3 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \, dx$$

$$= 4\pi\rho \int_r^0 (r^2 - u^2) \cdot u \cdot (-u) \, du$$

$$= 4\pi\rho \int_r^0 (u^4 - r^2 u^2) \, du$$

$$= 4\pi\rho \left[ \frac{u^5}{5} - r^2 \frac{u^3}{3} \right]_r^0$$

$$= 4\pi\rho \cdot \frac{2}{15} \cdot r^5$$

$$= \frac{2}{5} r^2 \cdot \left(\frac{4}{3} r^3 \pi\right) \cdot \rho$$

$$= \frac{2}{5} r^2 \cdot V_{\text{bol}} \cdot \rho$$

$$= \frac{2}{5} r^2 \cdot m_{\text{bol}}$$

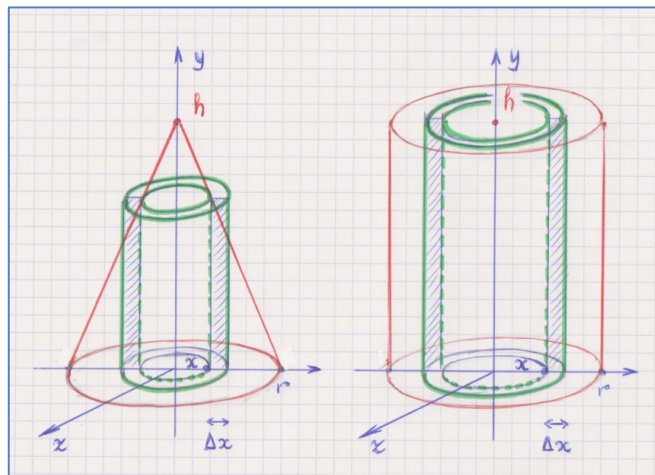
Het lettergedeelte van deze formule was te verwachten. Het is immers de eenvoudigste verwerking van de gegevens die uitgedrukt wordt in  $m^2 \cdot \text{kg}$ . Het getal  $\frac{2}{5}$  was veel minder te verwachten. Dit getal drukt numeriek uit in welke mate de bol zich verzet tegen een tolbeweging. Momenteel zegt dit getal nog niet zoveel. Enkel wanneer je het vergelijkt met de coëfficiënten van andere traagheidsmomenten kun je de gewilligheid van een massieve, tollende bol beoordelen.

Hiermee is de interesse gewekt voor de traagheidsmassa van een volle kegel en een volle cilinder. Deze berekeningen maken de leerlingen zelf aan de hand van de volgende werktekst.

begin lesactiviteit

## Traagheidsmassa van volle kegel en volle cilinder

In de les heb je de traagheidsmassa van de volle bol berekend. De techniek voor deze berekening kan helemaal overgeheveld worden naar de berekeningen met een kegel en met een cilinder. De kegel kan gezien worden als een omwentelingslichaam dat ontstaat door een 'schuin lijnstuk' rond de  $y$ -as te wentelen. De cilinder ontstaat door een 'verticaal lijnstuk' rond de  $y$ -as te wentelen.





1. Stel een formule op voor de massa  $\Delta m$  en de traagheidsmassa  $\Delta i$  van de dunwandige cilinderschil in een kegel die de volgende gegevens heeft: straal  $r$ , hoogte  $h$ , massa  $m$  en massadichtheid  $\rho$ .

$$\text{De traagheidsmassa van de cilinderschil is } \Delta i = \frac{2\pi\rho h}{r}(r-x) \cdot x^3 \cdot \Delta x.$$

2. Bereken de traagheidsmassa van de kegel.

$$\text{De traagheidsmassa van de kegel is } i = \frac{3}{10}mr^2.$$

3. Bereken de traagheidsmassa van de cilinder met de gegevens: straal  $r$ , hoogte  $h$ , massa  $m$  en massadichtheid  $\rho$ .

$$\text{De traagheidsmassa is } i = \frac{1}{2}mr^2.$$

4. Klasseer de volle bol, de volle kegel en de volle cilinder van makkelijk tollend naar moeilijk tollend.

Antwoord: de kegel tolt het makkelijkst, daarna de bol en daarna de cilinder.

einde lesactiviteit

### 6.3. Traagheidsmassa van holle lichamen

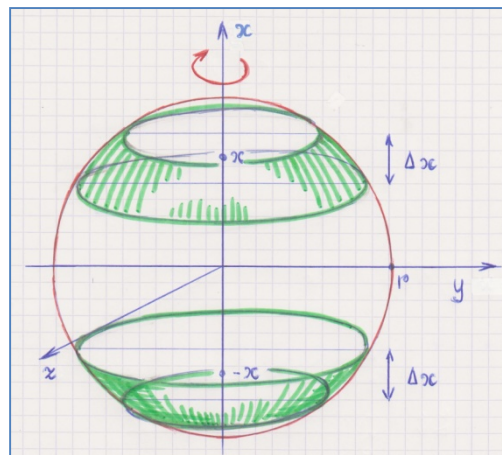
Voor de berekening van traagheidsmomenten van holle lichamen, gaan we vergelijkbaar te werk. De gruzelementen die we nodig hebben zijn geen inhoud meer maar wel oppervlakten. De massadichtheid  $\rho$  is geen inhoudsmassadichtheid meer maar wel een oppervlaktemassadichtheid (zie het probleem van de drijvende doosjes). Ze wordt uitgedrukt in kilogram per vierkante meter.

Laten we als voorbeeld weer een traagheidsmoment van een bol berekenen, ditmaal eentje met alle massa in de schil. De bol draait opnieuw rond de verticale as. De straal en de massa zijn dezelfde als in het voorbeeld met de massieve bol.

Als ik in de klas vraag welke kleine grootheden er nu best kunnen gebruikt worden (m.a.w. welke verzameling punten ongeveer op gelijke afstand van de draaias liggen) dan omschrijven de leerlingen me een gruzelement in de vorm van een dunne bolzone. De oppervlakte van de bolzone is pas enkele lessen geleden berekend. Het zit nog vers in het geheugen dat de oppervlakte van de bolzone gelijk is aan de oppervlakte van de cilinder die rond de bol knelt en die dezelfde hoogte heeft als de bolzone.

Met bolzones lukt het inderdaad. Maar het is beter om een dubbele bolzone te nemen, symmetrisch rond het evenaarvlak.

We noemen de hoogte van de bolzone  $\Delta x$ . De as waarrond de bol tolt, noemen we dus gemakshalve de  $x$ -as. Dit wijkt een beetje af van de vorige berekeningen.



Figuur 13 Een dubbele bolzone op een boloppervlak

Ditmaal is de berekening van de massa en van de traagheidsmassa van de kleine grootheid een eitje. De enige moeilijkheid is nu nog de afstand te bepalen van alle moleculen van de dubbele bolzone tot de draaias. Voor kleine waarden van de hoogte  $\Delta x$  van de bolzone zal deze afstand gelijk zijn aan  $\sqrt{r^2 - x^2}$ . Hiermee is alles klaar voor de berekening van de traagheidsmassa van de dubbele bolzone.

$$\begin{aligned} \Delta m &= 2 \cdot \rho \cdot \Delta V \\ &= 2 \cdot \rho \cdot 2\pi r \cdot \Delta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta i &= (r^2 - x^2) \cdot \Delta m \\ &= (r^2 - x^2) \cdot 2 \cdot \rho \cdot 2\pi r \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Er rest nu niets anders meer dan het sommeren van zeer veel zeer kleine traagheidsmassa's, wat in de limiet weer een integraal wordt. Vermits we de traagheidsmomenten berekenden van twee bolzones tegelijkertijd (eentje op het noordelijk en eentje op het zuidelijk halfrond) lopen de integratiegrenzen van 0 tot  $r$ . Voor de eigenlijke integraalberekening zijn er deze keer geen



speciale technieken nodig. Een splitsing van de integraal over een som volstaat.

$$\begin{aligned}
 i &= 4\pi r \cdot \rho \cdot \int_0^r (r^2 - x^2) dx \\
 &= 4\pi r \cdot \rho \cdot \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r \\
 &= 4\pi r \cdot \rho \cdot \frac{2}{3} r^3 \\
 &= \frac{2}{3} \cdot r^2 \cdot 4\pi r^2 \cdot \rho \\
 &= \frac{2}{3} \cdot r^2 \cdot \text{oppervlakte}_{\text{bol}} \cdot \rho \\
 &= \frac{2}{3} \cdot r^2 \cdot m_{\text{bol}}
 \end{aligned}$$

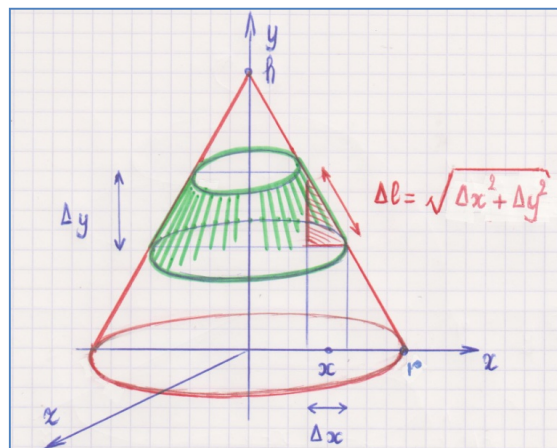
De eindformule ziet er keurig uit. Het lettergedeelte is helemaal in de lijn van de verwachting. En de breuk  $\frac{2}{3}$  zegt ons dat de holle bol meer weerstand biedt bij het draaien dan de drie voorgaande massieve objecten met dezelfde straal en dezelfde massa.

Na de berekeningen met de holle bol blijven er nog twee traagheidsmassa's over: die van de holle kegel en die van de volle cilinder. Ze kunnen in alle vertrouwen als huistaak meegegeven worden aan de leerlingen. Een korte werktekst kan hen van dienst zijn.

begin lesactiviteit

## Traagheidsmassa van holle kegel en holle cilinder

In de les hebben we met een intuïtieve methode aangetoond dat de traagheidsmassa van een holle kegel gelijk was aan die van een volle cilinder. De formule was  $i = \frac{1}{2}mr^2$ . Niet iedereen in de klas vertrouwde deze intuïtieve aanpak. Daarom rekenen we de traagheidsmassa van de holle kegel nog eens in detail na.



1. Neem een kegel met straal  $r$  en hoogte  $h$ . De massa  $m$  van deze kegel is homogeen over de mantel verdeeld. Stel de oppervlaktetechtheid gelijk aan  $\rho$ . Verdeel de mantel in afgeknotte kegels zoals op de figuur. Stel een formule op voor de oppervlakte  $\Delta S$  van een van de afgeknotte kegels. Herinner je dat de oppervlakte van een afgeknotte kegel gelijk is aan de oppervlakte van een cilinder met als straal de gemiddelde straal van de afgeknotte kegel en als hoogte de schuine hoogte van de kegel. De gevraagde formule voor  $dS$  mag afhangen van  $\Delta x$  en  $\Delta y$ .

*Oppervlakte van de afgeknotte kegel:*  $\Delta S = 2\pi x \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

2. Verwerk in deze formule de richtingscoëfficiënt van de omwentelende rechte op de kegelmantel.

*Oppervlakte van de afgeknotte kegel:*

$$\Delta S = 2\pi x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x = 2\pi x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-h}{r}\right)^2} \cdot \Delta x = \frac{2\pi x}{r} \cdot \sqrt{r^2 + h^2} \cdot \Delta x$$

3. Stel een formule op voor het traagheidsmoment  $\Delta i$  van de afgeknotte kegeltjes op de kegelmantel.

*Traagheidsmoment:*  $\Delta i = \frac{2\pi\rho}{r} \sqrt{r^2 + h^2} \cdot x^3 \cdot \Delta x$



4. Bereken het traagheidsmoment van de holle kegel. Maak gebruik van de oppervlakteformule van de kegel met straal  $r$  en apothema  $l$ . De oppervlakte van deze kegel is gelijk aan  $r\pi l$ .

*Traagheidsmassa van de holle kegel:  $i = \frac{1}{2}r^2m$*

5. Geef de formule voor de traagheidsmassa van een holle cilinder met straal  $r$ . Maak geen enkele berekening maar geef in de plaats een redenering.

*De formule is  $i = r^2m$ . Alle punten van de holle cilinder liggen immers op afstand  $r$  van de rotatieas. Je mag het hele ruimtelichaam dus meteen als een extreem groot gruzelement (of een extreem grote kleine grootheid ☺) beschouwen.*

6. Geef nu een definitieve ranking van de holle en volle bol, cilinder en kegel volgens opklimmende traagheidsmassa.

*Op de eerste plaats komt de volle kegel ( $i = \frac{9}{30}r^2m$ ), daarna de volle bol ( $i = \frac{12}{30}r^2m$ ), vervolgens komen de volle cilinder en de holle kegel in een ex aequo ( $i = \frac{15}{30}r^2m$ ), gevolgd door de holle bol ( $i = \frac{20}{30}r^2m$ ) en op de laatste plaats staat de holle cilinder ( $i = \frac{30}{30}r^2m$ ).*

einde lesactiviteit

## 6.4. Theoretische achtergrond

### Kracht en versnelling

Een van de belangrijkste wetten in de fysica is de *tweede wet van Newton*. Deze wet legt een link tussen een kracht die op een voorwerp wordt uitgevoerd en de versnelling die dit voorwerp hierdoor krijgt:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}.$$

De kracht en de versnelling in de tweede wet van Newton zijn vectoren, die evenredig zijn. De evenredigheidsconstante is de massa  $m$  van het lichaam. Hoe groter de massa  $m$  hoe meer kracht er moet uitgeoefend worden om het lichaam een bepaalde versnelling te geven. Hoe kleiner de massa, hoe kleiner deze kracht.

In het zesde jaar ASO komt de tweede wet van Newton ter sprake in de fysicales bij de hoofdstukken over dynamica en kinematica. Leerlingen uit TSO kennen deze wet mogelijk ook uit de lessen mechanica die in de tweede graad gegeven worden in bepaalde studierichtingen.

Hieronder lichten we een analoge formule toe voor rotatiebewegingen.

### Krachtsmomenten

Als er twee of meerdere krachten op een voorwerp uitgeoefend worden, kan dit voorwerp een draai beweging ondergaan.

Een eenvoudig voorbeeld van zulke situatie is het aandraaien van een bout met een steeksleutel. Op deze sleutel werken twee krachten in: de manuele kracht van de klusser die de bout aandraait en

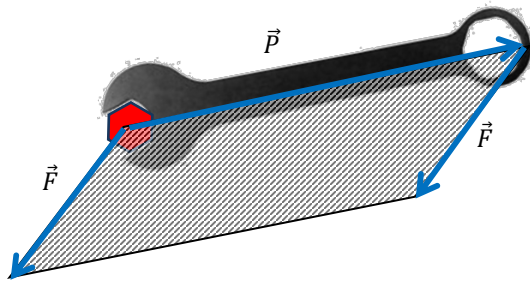
de weerstandskracht van de bout in de moer. Hierdoor ontstaat een draai beweging van de sleutel rond een vast centrum, het middelpunt van de bout.



*Figuur 14 Een kracht uitgeoefend op een steeksleutel*

Een *krachtsmoment*  $\vec{M}$  is een maat voor het effect van de kracht  $\vec{F}$  op de draai beweging rond een bepaalde as. De effectiviteit van de geleverde kracht is niet alleen afhankelijk van de grootte ervan maar ook van haar aangrijpingspunt en van haar richting. Hoe verder dit aangrijpingspunt van het rotatiemiddelpunt gelegen is, hoe effectiever de kracht benut wordt voor de rotatie. En hoe (lood-)rechter de kracht staat op de verbindingslijn van het aangrijpingspunt met het draaimiddelpunt, hoe efficiënter ook de benutting van de kracht.

De drie factoren die invloed hebben op de effectieve benutting van de kracht, kunnen samengevat worden in één grootte: de oppervlakte van het parallellogram dat opgespannen wordt door de krachtvector  $\vec{F}$  en de plaatsvector  $\vec{P}$  vanuit het draaicentrum, zie figuur 15.



Figuur 15 Een maat voor de effectiviteit van de kracht

Het *krachtmoment* of de *momentvector*  $\vec{M}$  (in het Engels: torque) is een vector waarvan de lengte gelijk is aan de oppervlakte van het hierboven beschreven parallellogram. De richting van deze vector staat loodrecht op het vlak waarin de krachtvector  $\vec{F}$  en de plaatsvector  $\vec{P}$  liggen. En de zin van deze vector vind je door de vector  $\vec{P}$  naar  $\vec{F}$  te draaien met de rechterhand(regel). Op figuur 15 zie je de momentvector  $\vec{M}$  niet omdat hij loodrecht op het blad staat. De vector  $\vec{M}$  wijst in het blad.

Zoals je merkt, neemt de definitie van  $\vec{M}$  vanuit  $\vec{P}$  en  $\vec{F}$  flink wat zinnen in beslag. Maar die kunnen we samenvatten in een kortere uitdrukking:

$$\vec{M} = \vec{P} \times \vec{F}.$$

In woorden: de vector  $\vec{M}$  is het vectorieel product van de vectoren  $\vec{P}$  en  $\vec{F}$ . Krachtmomenten worden uitgedrukt in Nm (lees: Newtonmeter) of in  $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$ .

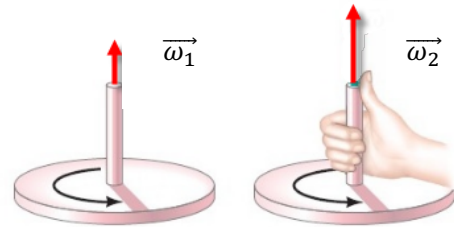
### Hoeksnelheid en hoekversnelling

Krachtmomenten zorgen voor een draai beweging met een welbepaalde *hoekversnelling*.

Sommige rotatiebewegingen hebben een constante hoeksnelheid, bijvoorbeeld een draai beweging van een droogtrommel die op volle kracht draait. Andere rotatiebewegingen hebben een variabele hoeksnelheid, bijvoorbeeld de draai beweging van een droogtrommel die zich vanuit stilstand in beweging zet. In dit laatste geval neemt de hoeksnelheid toe en spreken we van een hoekversnelling.

Hoeksnelheden van een rotatiebeweging kunnen we symbolisch voorstellen met een vector op de rotatieas. De zin van deze vector wordt bepaald met de rechterhandregel. In figuur 16 zie je twee verschillende hoeksnelheden  $\omega_1$  en  $\omega_2$  afgebeeld met  $\omega_1 < \omega_2$ . In dit geval is er een hoekversnelling.

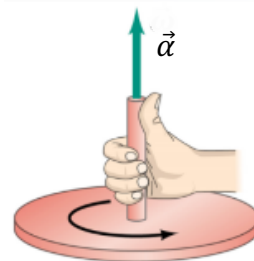
Hoeksnelheden worden uitgedrukt in toeren per minuut (bijvoorbeeld in het geval van een droogtrommel) of in radialen per seconden (in algemene technische toepassingen). Hoeken in radialen zijn onbenoemde getallen. Daarom kunnen we hoeksnelheden ook uitdrukken in de eenheid  $\text{s}^{-1}$ .



Figuur 16 Een toenemende hoeksnelheid of een hoekversnelling

De gemiddelde verandering per tijdseenheid van een hoeksnelheid is de *hoekversnelling*. Hoekversnellingen worden bijgevolg uitgedrukt in  $\text{s}^{-2}$ .

Hoekversnelling stellen we, analoog aan hoeksnelheden, ook vectorieel voor met de rechterhandregel. Op de onderstaande figuur is de vector  $\vec{\alpha}$  een hoekversnellingsvector. Als de zin van deze vector omgekeerd zou zijn aan die van de hoeksnelheidsvector dan spreken we van een hoekvertraging.



Figuur 17 Richting en zin van een hoekversnelling

### Analogie met tweede wet van Newton

De *massa* van een lichaam is de *weerstand* van dit lichaam tegen een versnelling wanneer er een kracht op dit lichaam uitgeoefend wordt.

Analoog is de *traagheidsmassa* de *weerstand* van een lichaam tegen een draai versnelling wanneer er een draaimoment op dit lichaam wordt uitgeoefend.

In formulevorm noteren we dit als:

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}.$$

De momentvector  $\vec{M}$  en de versnellingsvector  $\vec{\alpha}$  zijn evenredig. Hoe groter het krachtmoment, hoe groter de hoekversnelling. Hoe kleiner het krachtmoment, hoe kleiner de hoekversnelling.



De evenredigheidsconstante tussen deze twee vectoren is de traagheidsmassa  $i$ . De traagheidsmassa zegt niet alleen iets over de massa van een lichaam maar ook over de spreiding van deze massa ten opzichte van de draaias. Traagheidsmassa's worden uitgedrukt in  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ . Hoe ze in eenvoudige gevallen berekend worden, werd uitgelegd in de voorgaande werkteksten.

## 7. Meer lezen?

Wiskundige toepassingen gerelateerd aan fysica kwamen al vaker aan bod in spinnenwebartikels, in een loep of in een bibwijzerbijdrage. Hieronder een overzicht met artikels voor lezers die meer willen weten over dit onderwerp.

- tweedegraadsfuncties in de fysica: UW 5/3

- wiskunde achter de regenboog: UW 7/1
- wiskunde en fysica, twee verschillende vakken... : UW 10/3
- de waterstraalkromme: UW 17/1
- elektrische netwerken en complexe getallen: UW 21/4
- elastiekjes en zeepbellen: UW 23/3
- vectoren in de tweede graad: UW 25/1
- mathematische mechanica: UW 27/3
- snelheid met wrijving: UW 28/2
- berekening van  $\pi$  door middel van elastisch botsende ballen: UW 31/4
- wiskunde en fysica: UW 32/1
- wiskunde en Angry Birds: UW 32/3

## Bronnen

- Chevallard, Y. (1989). *Arithmétique, Algèbre, Modélisation, étapes d'une recherche*. Aix-Marseille: IREM.
- Giancoli, D. C. (2008). *Natuurkunde, deel 1: mechanica en thermodynamica*. Pearson Education Benelux, ISBN 978-90-430-1324-6
- Hibbeler, R. C. (2010). *Statica*. Pearson Education Benelux, ISBN 978-90-430-1736-7
- Kleine, W., Mulder, H., Vonk, G.A. (1978). *Biljarten met één bal...* Pythagoras 4 jaargang 17. Wolters-Noordhof, 87-90.
- Krysinska, M. (2011). Boîtes qui flottent, boîtes qui coulent, d'après une idée de Y. Chevallard. *Losanges* 14, 26-31.
- Krysinska, M. (2017). Boîtes qui flottent, boîtes qui coulent. In: *Le plaisir de chercher en mathématiques*. Louvain-la-Neuve: Presses Univesitaires de Louvain, 148-156.
- Parker, M. (2014). Wobbly circles. Numberphile.  
[http://www.numberphile.com/videos/wobbly\\_circles.html](http://www.numberphile.com/videos/wobbly_circles.html)
- Parker, M. (2014b) <https://www.youtube.com/watch?v=o8m7dwLMsGs> (extra footage waarin hij toegeeft dat hij het enkel narekende voor de twee speciale posities)
- Saitoh, M. (2005). (Japanse titel onbekend). *Parity* 20, 60, geciteerd in Ucke en Schlichting (2011).
- Stewart, A.T. (1966). Two-circle roller. *American Journal of Physics* 34/2, 166-167.
- Ucke, C., Schlichting, H.J. (2011). Wobbler oder Zwei-Scheiben-Roller. In: *Spiel, Physik und Spaß*. Weinheim: Wiley Verlag, 31-33.
- <https://mathcraft.wonderhowto.com/how-to/make-two-circle-wobbler-from-cds-0130738/>