

Onder de loep

# Teltechnieken

Luc Van den Broeck  
Gilberte Verbeeck

## Verzoeknummers op de schoolfuif

Elk jaar organiseert het zesde jaar van Sint-Jozef twee schoolfuiven in feestzaal 'de Rex'. De dj heeft een lijst met 100 songs ter beschikking om de muziek af te stemmen op het fuifpubliek. Hij heeft vier methodes om drie aangevraagde songs te spelen. We onderzoeken telkens de vraag: 'Hoeveel mogelijke afspeellijsten van drie songs kunnen de jongeren bepalen?'

### Methode 1

De dj spreekt een fuiver aan. Die duidt zijn top drie van favoriete songs aan op de lijst. De dj speelt de drie songs in de loop van de avond in de volgorde van de top drie.

1. Geef jouw top drie van favoriete songs.
2. Heeft iemand in de klas dezelfde songs in zijn top drie? Zo ja, heeft hij dezelfde top drie?
3. Maak een schatting van het aantal mogelijke afspeellijstjes.

### Methode 2

De dj spreekt een fuiver aan. Die duidt zijn top drie van meest favoriete songs aan op de lijst. De dj speelt de drie songs in de loop van de avond in alfabetische volgorde af.

4. Geef één of meerdere afspeellijstjes van jouw top drie.
5. Zijn er meer of minder mogelijke afspeellijstjes dan bij methode 1? Hoe komt dat?
6. Maak een schatting van het aantal mogelijke afspeellijstjes.

### Methode 3

De dj spreekt drie fuivers aan. Zij duiden elk op de lijst van de dj hun favoriete song aan en geven die af. De dj speelt de songs af in de volgorde waarop hij de lijsten krijgt.

7. Geef een mogelijk afspeellijstje van de dj.
8. Waarin verschilt deze methode met de eerste? Wat is het effect op de mogelijke afspeellijstjes?
9. Hoeveel afspeellijstjes zijn er nu?

### Methode 4

De dj spreekt drie fuivers aan. Zij duiden elk op de lijst van de dj hun favoriete song aan en geven die af. De dj speelt de nummers af in alfabetische volgorde.

10. Zijn er meer of minder mogelijke afspeellijstjes dan bij methode 3? Hoe komt dat?
11. Zijn er meer of minder mogelijke afspeellijstjes dan bij methode 2? Hoe komt dat?

We zochten telkens het antwoord op de vraag: 'Hoeveel mogelijke afspeellijstjes van drie songs kunnen de fuivers bepalen?' Deze mogelijkheden moeten we tellen. Vandaar dat we dit een *telprobleem* noemen.

Er zijn te veel mogelijkheden om ze allemaal uit te schrijven. We moeten op zoek gaan naar methodes, schematische voorstellingen of formules. Uit de bovenstaande voorbeelden die zoeken naar het aantal afspeellijsten, blijkt dat er een subtiel onderscheid kan zijn tussen verwante telproblemen.

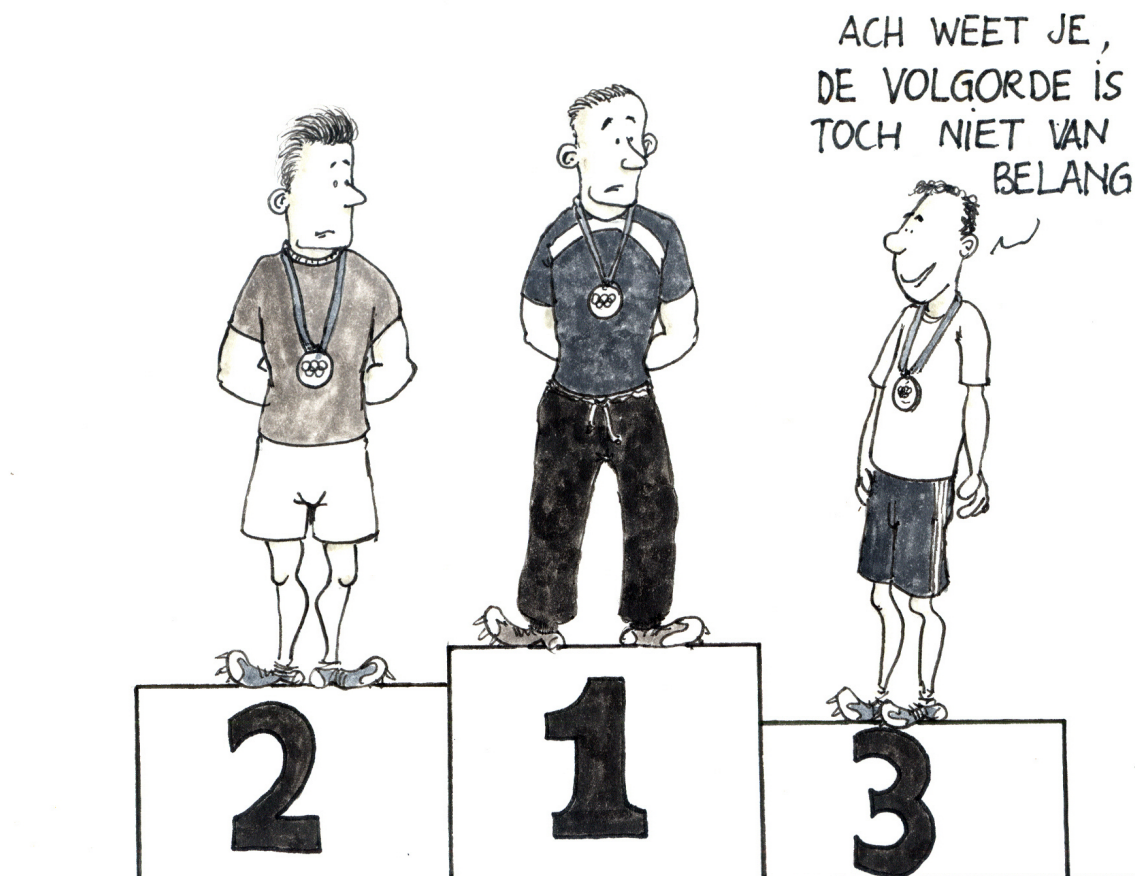
12. Welke gelijkenissen en verschillen zie je in de vier methodes?

Om na te denken over dit soort gelijkenissen en verschillen in opgaven, kun je nadenken over de volgende zes vragen. Beantwoord als huiswerk elke vraag voor de opgaven van de afspeellijstjes bij elk van de vier methodes.

**Soorten groeperingen** Welke vragen stel je om de groeperingsvorm te bepalen?

1. Wat tel je? Geef enkele voorbeelden.
2. Over welk element gaat het in deze telling?
3. Hoeveel elementen zijn er ter beschikking? We noemen dit aantal  $n$ .
4. Hoeveel elementen moet je kiezen? We noemen dit aantal  $p$ .
5. Hebben de geselecteerde elementen een bepaalde rol? Geeft een andere volgorde een andere mogelijkheid? Verklaar.
6. Kun je een element meerdere malen kiezen? Verklaar.

De volgende opdrachten loste je op in het vierde jaar. Omdat het aantal mogelijkheden klein was, kon je ze allemaal uitschrijven en het aantal tellen. We oefenen de bovenstaande zes vragen op deze voorbeelden.



**Opdracht 1**

Hoeveel getallen van twee cijfers kun je vormen met de cijfers 1, 2, 3 en 4?

1. Wat tel je? Geef enkele voorbeelden.
2. Over welk element gaat het in deze telling?
3. Hoeveel elementen zijn er ter beschikking? Noem dit aantal  $n$ .
4. Hoeveel elementen moet je kiezen? Noem dit aantal  $p$ .
5. Hebben de geselecteerde elementen een bepaalde rol? Geeft een andere volgorde een andere mogelijkheid? Verklaar.
6. Kun je een element meerdere malen kiezen? Verklaar.

**Opdracht 2**

Op hoeveel manieren kan men twee klasvertegenwoordigers kiezen in een klas van 5 leerlingen? Stel dat Ahmed, Bob, Cheb, Dora en Ems de leerlingen uit de klas zijn.

1. Wat tel je? Geef enkele voorbeelden.
2. Over welk element gaat het in deze telling?
3. Hoeveel elementen zijn er ter beschikking?
4. Hoeveel elementen moet je kiezen?
5. Hebben de geselecteerde elementen een bepaalde rol? Geeft een andere volgorde een andere mogelijkheid? Verklaar.
6. Kan je een element meerdere malen kiezen? Verklaar.

## Typevoorbeelden en combinatieleer

Beantwoord bij de onderstaande opdrachten de zes vragen voor het analyseren van telproblemen. Omcirkel vervolgens de juiste formule.

### Een delegatie sturen

Hoeveel mogelijkheden zijn er om een delegatie van 5 leerlingen uit een klas met 21 leerlingen naar een overleg met de directie te sturen?

1. Wat tel je? Geef hierbij enkele voorbeelden.
2. Over welk element gaat het in deze telling?
3. Hoeveel elementen zijn er ter beschikking?
4. Hoeveel elementen moet je kiezen?
5. Hebben de geselecteerde elementen een bepaalde rol? Geeft een andere volgorde een andere mogelijkheid?
6. Kun je een element meerdere keren kiezen? Verklaar.

De formule is  $C_n^p$   $V_n^p$   $P_n$   $\bar{C}_n^p$   $\bar{V}_n^p$   $\bar{P}_n^{p_1, p_2, \dots}$

### De top drie

Hoeveel mogelijkheden zijn er om een top drie van favoriete songs op te stellen uit een lijst van 1000 songs?

5. Hebben de geselecteerde elementen een bepaalde rol? Geeft een andere volgorde een andere mogelijkheid?

### Het schoolrestaurant

Op hoeveel manieren kan een klas van 20 leerlingen in een rij aanschuiven in het schoolrestaurant?

5. Hebben de geselecteerde elementen een bepaalde rol? Geeft een andere volgorde een andere mogelijkheid?

### Het cijferslot

Op hoeveel manieren kun je een cijferslot van 4 cijfers voor een fiets instellen?

5. Hebben de geselecteerde elementen een bepaalde rol? Geeft een andere volgorde een andere mogelijkheid?

### Soep met balletjes

Op hoeveel manieren kan vader de 15 balletjes uit een kookpot met tomatensoep verdelen over de borden van vier kinderen?

1. Wat tel je? Geef hierbij enkele voorbeelden.



2. Over welk element gaat het in deze telling?
3. Hoeveel elementen zijn er ter beschikking?
4. Hoeveel elementen moet je kiezen?
5. Hebben de geselecteerde elementen een bepaalde rol? Geeft een andere volgorde een andere mogelijkheid?
6. Kun je een element meerdere keren kiezen? Verklaar.

### **Ananassap**

Hoeveel anagrammen kun je maken van het woord ANANASSAP? Beantwoord de zes typevragen voor het analyseren van telproblemen.

5. Hebben de geselecteerde elementen een bepaalde rol? Geeft een andere volgorde een andere mogelijkheid?
6. Kun je een element meerdere keren kiezen? Verklaar.

De bovenstaande voorbeelden noemen we typevoorbeelden. Als je het typevoorbeeld herkent, weet je of de groeperingen een combinatie, variatie, permutatie, herhalingsvariatie, herhalingscombinatie of herhalingspermutatie is.

Onthoud de volgende woorden om naar typevoorbeelden te verwijzen: delegatie (combinatie), top drie (variatie), schoolrestaurant (permutatie), cijferslot (herhalingsvariatie) en als uitbreiding soepballetjes (herhalingscombinatie) en ananassap (herhalingspermutatie).

## Telproblemen en notaties

Door veel te oefenen krijg je inzicht in telproblemen. Hieronder volgen twintig basistelproblemen. Je gaat na of het om een variatie, permutatie, combinatie of herhalingsvariantie gaat en je duidt de formule aan waarmee je het aantal kunt bepalen. Je zet bij elk probleem het typevoorbeeld waarmee het overeenstemt. Gebruik hiervoor de volgende woorden: delegatie, top drie, schoolrestaurant of cijferslot. Je kunt je antwoorden controleren via Socrative. Open de app en gebruik CD978547 als 'roomnummer'. Als je merkt dat je een fout maakt, moet je de voorbeelden grondiger analyseren en de gestelde vragen nauwgezet beantwoorden. Zo kun je merken waar je fout redeneert.

1. Je hebt twee extra vrijkaarten voor een jazzfestival. Je wilt twee vrienden meenemen naar het festival door hen de vrijkaarten te geven. Hoeveel mogelijkheden zijn er om je twee kaarten weg te geven aan twee van je zes beste vrienden zodat ze met je mee kunnen gaan naar het festival?
2. Bij het spelletjes Mastermind plaats je vier pinnetjes te kiezen uit zes kleuren (rood, groen, blauw, geel, bruin en oranje) op een bord in een bepaalde volgorde. De pinnetjes hoeven niet noodzakelijk verschillend van kleur te zijn. Bereken het aantal mogelijkheden om vier pinnetjes te plaatsen.
3. In het kader van hun studiekeuze moeten de leerlingen van het zesde jaar een persoon die een job uitoefent die hen interesseert, een dag volgen. De vijftien leerlingen van een klas kunnen kiezen uit vijftien verschillende personen. Op hoeveel verschillende manieren kan dit als elke leerling een andere persoon moet kiezen.
4. Op het onderstaande *mini-Lotto*-formulier moeten drie van de vijf vakjes worden aangekruist. Hoeveel mogelijkheden zijn er om dit te doen?

1	2	3
4	5	

5. Een zaal heeft vijf deuren. Op hoeveel manieren kan iemand de zaal binnenkomen en de zaal door een andere deur verlaten?

## Autokentekens

In het jaar 2010 schakelde België over op Europese autokentekens. In ons land hebben de Europese nummerplaten robijnrode letters en cijfers op een witte achtergrond met een rode rand. Er rijden nog steeds een aantal oude autokentekens rond maar momenteel zijn de meeste kentekens van de vorm 1-ABC-123.



De wet legt een beperking op aan het lettergedeelte. De letters I, O en Q worden niet gebruikt omdat ze te erg op de cijfers 1 en 0 lijken. Verder zijn er 100 drieletterwoorden verboden omdat ze als scheldwoord kunnen opgevat worden (AAP, ZAK, ...), omdat ze een politieke betekenis hebben (CDH, CDV, ...) of omdat ze seksueel getint zijn (LUL, GAY, ...).

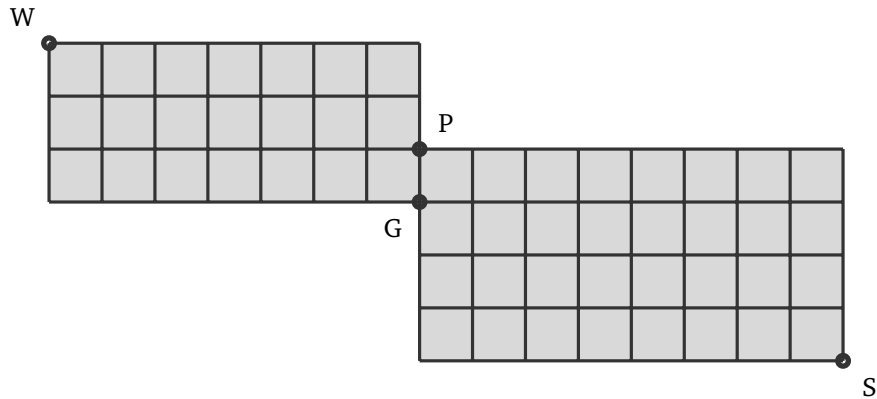
1. Hoeveel kentekens zijn er als je geen rekening moet houden met de verboden woorden maar wel met de verboden letters? Het cijfer voor de drie letters moet altijd 1 zijn.
2. Hoeveel bezwaarlijke autokentekens zijn er die beledigend, politiek of seksueel getint zijn?
3. Hoeveel toegelaten kentekens zijn er die beginnen met het cijfer 1?

Dit aantal komt ongeveer overeen met het aantal inwoners van België. Indien het nodig mocht zijn, kan het eerste kencijfer van het kenteken later nog vervangen worden door een ander cijfer. Eventueel kunnen ook de letter- en cijferblokjes nog omgewisseld worden. Op deze manier hoopt men in de Europese Unie over genoeg kentekens te beschikken om enkele honderden jaren verder te kunnen.



## Kortste wegen van huis naar school

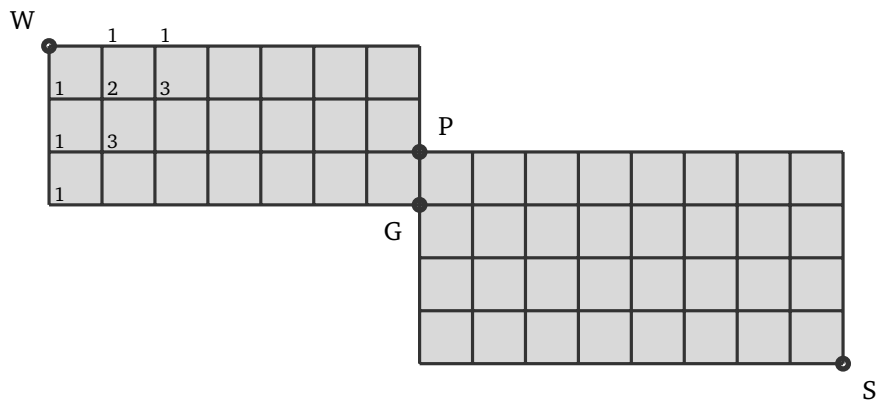
Hieronder zie je een rechthoekig stratenplan. Linksboven zie je de woonplaats (W) van Astrid en rechtsonder zie je haar school (S). Op weg van huis naar school moet ze langs een flessenhals passeren. Er zijn vaak opstoppingen bij de post (P) en ook bij het gemeentehuis (G).



Astrid kan op verschillende manieren van haar woning naar school fietsen zonder een omweg te doen. De enige voorwaarde om een kortste weg naar school te nemen is dat ze alleen in zuidelijke en in oostelijke richting rijdt.

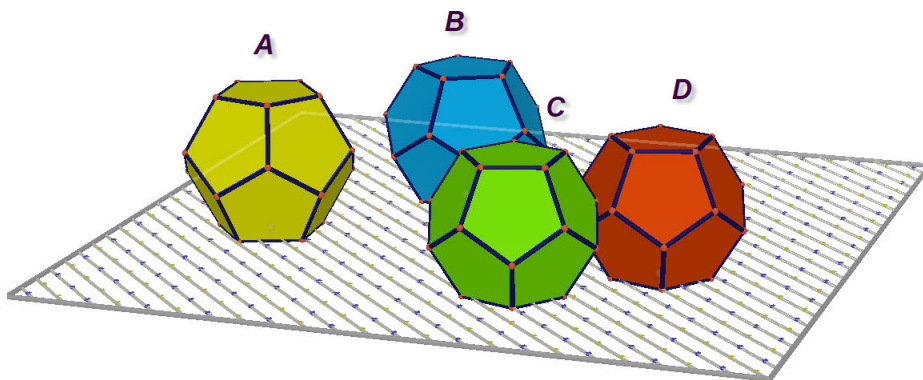
1. Op hoeveel manieren kan Astrid van haar woning naar school fietsen via de post?
2. Hoeveel kortste trajecten zijn er via het gemeentehuis?
3. Op hoeveel manieren kan Astrid van haar woning naar school fietsen zonder omwegen te maken?

Een andere manier om dit antwoord uit te tellen, verloopt zonder veel voorkennis. Noteer bij elk kruispunt op hoeveel manieren je het kunt bereiken zonder omwegen te doen. Je begint bij het kruispunt 'W' linksboven en eindigt rechtsonder. Bij elke kruispunt dat niet op de rand gelegen is, schrijf je de som van het getal erboven en het getal links. Zo krijg je een schema dat verwant is met de driehoek van Pascal. Je merkt zelf wel dat het veel geduld vraagt om deze getalletjes verder uit te rekenen tot bij S.



## Drie samengestelde telproblemen

1. Een voetbaloutfit bestaat uit een petje, een sjaal, een truitje, een voetbalshort en twee kousen (linker- en rechterkous uiteraard van dezelfde kleur). Het voetbalteam van de school gebruikt de kleuren zwart, wit en rood. Hoeveel voetbaloutfits zijn er mogelijk waarbij alle kleuren voorkomen? Leg stapsgewijze uit hoe je dit aantal berekent.
2. Een dodecaëderdobbelsteen heeft 12 zijvlakken met in de meeste uitvoeringen een getal van 1 tot 12 op de zijvlakken. Voor deze oefening mag je je deze dobbelstenen voorstellen met ogen. Deze voorstellingswijze is eenvoudiger. Bereken op hoeveel manieren er met vier dodecaëderdobbelstenen van een verschillende kleur 17 (ogen) kan gegooid worden.



3. KOOS U DE GARAGE DUS OOK is een palindromische zin. De letters van deze zin zijn spiegelsymmetrisch geschikt ten opzichte van de middelste letter, de R, maar de spaties hoeven dat bij een palindromische zin niet te zijn. Als ook de spaties symmetrisch zouden zijn, spreken we van een volmaakte palindroom. Volmaakte palindromen zijn veel zeldzamer dan gewone palindromische zinnen. Een voorbeeld hiervan is de geromantiseerde uitspraak die Napoleon deed nadat hij naar Elba was verbannen: ABLE WAS I ERE I SAW ELBA.

Hoeveel palindromische anagrammen zijn er van KOOS U DE GARAGE DUS OOK? De anagrammen hoeven geen betekenis te hebben. Ze moeten wel uit zes woorden bestaan. Leg grondig de structuur van je berekeningen uit.