



Een model voor de verspreiding van infecties

1. Het SIR-algoritme

Epidemiologie is de wetenschappelijke studie van het voorkomen en de verspreiding van ziekten binnen en tussen populaties. Hierin wordt vaak het wiskundige SIR-model gebruikt dat een verband legt tussen het aandeel vatbare personen $s(t)$ (susceptibles), het aandeel geïnfecteerde personen $i(t)$ (infected) en het aandeel genezen personen $r(t)$ (recovered) op tijdstip t in onze maatschappij. In deze studie vertalen we deze begrippen: $v(t)$ voor **vatbaar**, $a(t)$ voor **aange-tast** en $n(t)$ voor **niet meer aangetast** (genezen of gestorven). Elk van deze aandelen is een getal in het interval $[0, 1]$. De som $v(t) + a(t) + n(t)$ is gelijk aan 1.

Er is een reden waarom we hier een vertaling van de namen promoten. Als we programmeren zal de letter i van infected altijd voor verwarring zorgen met het complexe getal i en met de teller i in de lussen. Vanaf nu spreken we dus over het **VAN-algoritme**.

Om de evolutie van een ziekte die verspreid wordt door een bacterie of een virus te voorspellen, moet de **begintoestand** (de toestand op tijdstip $t = 0$) gekend zijn. Zo kunnen we bijvoorbeeld bij een eerste observatie vaststellen dat 1% van de bevolking aangetast is en dat er nog niemand genezen is. Dit vertalen we dan als $v(0) = 0,99$, $a(0) = 0,01$ en $n(0) = 0$.

Daarna laten we de tijd met **korte intervalletjes** omhoogklimmen. We kunnen deze intervallen Δt bijvoorbeeld gelijkstellen aan een kwart van een dag. Dit betekent dat we om de zes uur een nieuwe telling doen van de drie populaties. Deze waarde voor Δt lijkt aanvaardbaar. Op een kwart van een dag kunnen er bij ziektes zoals Corona al heel wat geïnfecteerden zijn bijgekomen en al heel wat zieken gestorven zijn.

Om het aantal personen in de drie populaties te voorspellen doorheen een hele periode, moeten we in stapjes doorrekenen met behulp van de volgende drie **differentievergelijkingen**. We verklaren deze vergelijkingen verderop.

$$\begin{aligned} (1) \quad \Delta v(t) &= -b \cdot v(t) \cdot a(t) \\ (2) \quad \Delta a(t) &= +b \cdot v(t) \cdot a(t) - g \cdot a(t) \\ (3) \quad \Delta n(t) &= +g \cdot a(t) \end{aligned}$$

In deze vergelijkingen komen twee constanten voor. De **constante b** staat voor de besmettingsgraad: de kans dat een vatbare persoon in een tijdsinterval Δt aangetast raakt door een contact met een zieke. We gaan er in deze tekst van uit dat deze constante werkelijk constant is tijdens de epidemie. Dit betekent dat de overheid geen strengere regels oplegt aan de maatschappij en dat ze de regels ook niet versoepelt. We veronderstellen even dat deze constante op voorhand

gekend is, bijvoorbeeld $b = \frac{1}{15}$. Maar meestal kent men deze constante pas als de epidemie over de top heen is.

De **constante g** is de genezingsgraad: de kans dat een aangetaste binnen een tijdsinterval Δt geneest of sterft. Deze constante hangt af van de medische vaardigheden in de ziekenhuizen en de medische apparatuur die er ter beschikking is. We veronderstellen dat ook deze constante op voorhand gekend is, bijvoorbeeld $g = \frac{1}{60}$.

Het aandeel van de klasse van de vatbare personen kan alleen maar verminderen. Het VAN-model stelt dat de **vermindering van het aandeel van de v -klasse per tijdsinterval evenredig is met het aantal ontmoetingen** tussen een vatbaar persoon en een aangetast persoon of met het product $v(t) \cdot a(t)$. De evenredigheidsconstante is b . En omdat het om een afname gaat, staat er een minteken in formule (1).

Het aandeel van de klasse van de niet meer vatbare (genezen of gestorven) personen kan alleen maar aangroeien. We stellen in het VAN-model dat de **aangroei van het aandeel van de n -klasse per tijdsinterval evenredig is met het aantal aangetaste personen**. De evenredigheidsconstante is g . Omdat het om een toename gaat, staat er een plus teken in formule (3).

Voor formule (2) hoeven we geen lange redenering te maken. We werken met een **gesloten systeem** waarbij er enkel uitwisselingen zijn tussen de drie populaties. De grenzen zijn gesloten. Er wordt geen immigratie of emigratie toegestaan. Daarom is $\Delta v(t) + \Delta a(t) + \Delta n(t)$ gelijk aan 0. Zo vinden we formule (2) uit formule (1) en formule (3).

2. Stapsgewijze doorrekenen

Met deze drie differentievergelijkingen kunnen we de **toestand op tijdstip $t = 1$** berekenen uit de toestand op tijdstip $t = 0$.

$$v(1) = v(0) + b \cdot v(0) \cdot a(0) = 0,99 - \frac{1}{15} \cdot 0,99 \cdot 0,01 = 0,98934 \dots$$

$$a(1) = a(0) + b \cdot v(0) \cdot a(0) - g \cdot a(0) = 0,01 + \frac{1}{15} \cdot 0,99 \cdot 0,01 - \frac{1}{60} \cdot 0,01 = 0,01049 \dots$$

$$n(1) = n(0) + g \cdot a(0) = 0 + \frac{1}{60} \cdot 0,01 = 0,00016 \dots$$

Zoals je kan vaststellen, is de toestand na een kwart van een dag nog niet noemenswaardig gewijzigd. Elke besmettingsziekte die zich verspreidt volgens het VAN-model heeft de tijd nodig om zich te verspreiden.

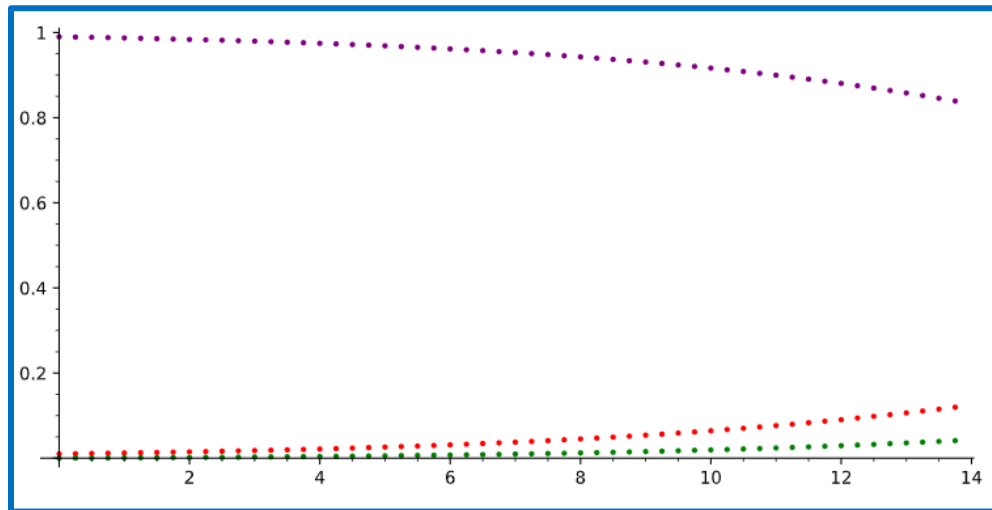
Op een vergelijkbare manier kunnen we de **toestand op tijdstip $t = 2$** berekenen.

$$v(2) = v(1) + b \cdot v(1) \cdot a(1) = 0,98864 \dots$$

$$a(2) = a(1) + b \cdot v(1) \cdot a(1) - g \cdot a(1) = 0,01101 \dots$$

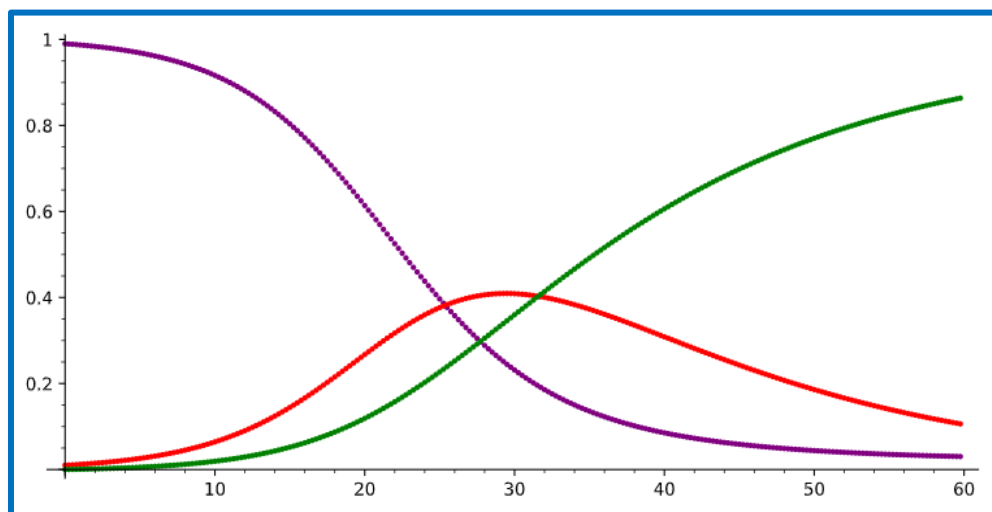
$$n(2) = n(1) + g \cdot a(1) = 0,00034 \dots$$

Na twee weken of na 56 tijdsintervallen, kunnen we wel een duidelijke verandering waarnemen. Op de onderstaande figuur zien we hoe het aandeel van de v -klasse vermindert (paarse grafiek) tot een kleine 90%, hoe het aandeel van de a -klasse (rode grafiek) stijgt tot boven de 10% en hoe het aandeel van de n -klasse (groene grafiek) heel voorzichtig stijgt. Dit is een normaal ziekteverloop.



Als we 240 intervallen of twee maanden verder doorrekenen, zie we dat waar de piek van de infecties zal liggen. Na ongeveer 28 dagen is bijna 45% van de bevolking geïnfecteerd.

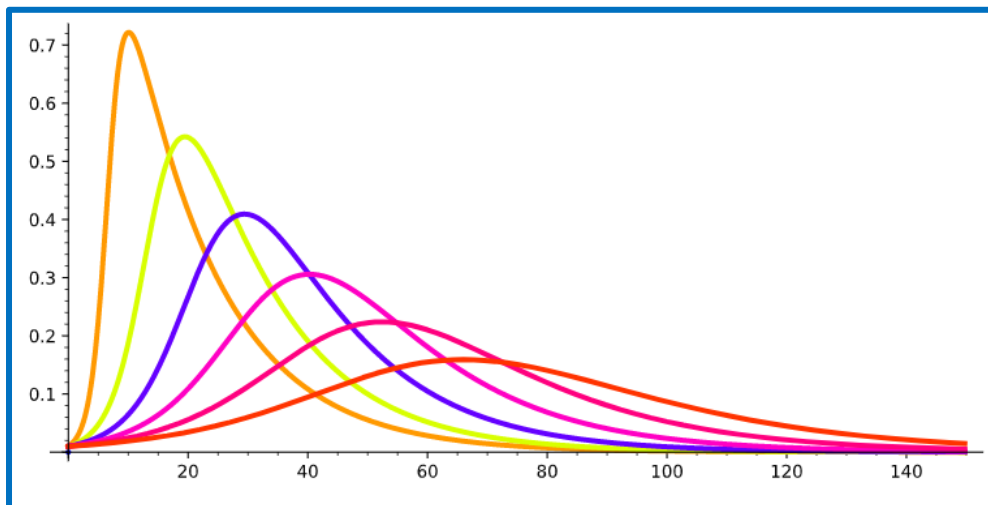
Bij deze waarden $b = \frac{1}{15}$ en $g = \frac{1}{60}$ zal na twee maanden ongeveer de hele v -klasse leeggestroomd zijn. De ziekte stopt dan op een natuurlijke manier. De drie grafieken zullen na verloop van tijd zo dicht bij hun horizontale asymptoot liggen dat er niet meer van een ziekte gesproken wordt.



3. Experimenteren met de besmettingscoëfficiënt b

Via het modelleren van het infectiepatroon kunnen we experimenteren met de coëfficiënten. Stel dat de genezingsgraad niet verandert. Hij blijft gelijk aan $\frac{1}{60}$. Dan kunnen we het **effect van de besmettingsgraad** op de grafiek vlotter bestuderen. Neem deze coëfficiënt b achterenvolgens gelijk aan $\frac{1}{5}$, aan $\frac{1}{10}$, aan $\frac{1}{15}$, aan $\frac{1}{20}$, aan $\frac{1}{25}$ en aan $\frac{1}{30}$. De besmettingsgraad b kan alleen maar kleiner worden door strikt nageleefde maatregelen: social distancing, extreme handhygiëne, geen absoluut noodzakelijke verplaatsingen ...

De onderstaande afbeelding toont de zes bijbehorende grafieken van de functie $a(t)$. We stellen vast dat de verkleining van de besmettingsgraad als effect heeft dat de top van de besmettingsfunctie **naar rechts opschuift** en dat de top ook **lager** wordt. Het is belangrijk dat de maximale aantasting van de bevolking de zorgcapaciteit van onze ziekenhuizen niet overschrijdt. Het is ook nuttig om de top naar rechts te verschuiven. Zo wint de gemeenschap tijd om te zorgen voor geneesmiddelen, mondklappers, handgels en testkits.



Of het opschuiven van de top ook als effect heeft dat de **totale impact** (lees: het aantal mandagen van de besmetting) van de epidemie lager wordt, is nog een vraag. De totale impact is evenredig met de oppervlakte onder de infectiekromme. Om een maatstaf te hebben die de totale impact van de ziekte weergeeft kunnen we ook de tweede coördinaatgetallen van de afzonderlijke stippen van een grafiek optellen. Het resultaat van dit theoretisch onderzoek verraden we hier nog niet. Je moet hier zelf een computerprogramma voor schrijven.

4. Een computerprogramma in Sage

Schrijf een computer programma in Sage om het VAN-model onder de loep te nemen.

Eerste deel

Stel $b = \frac{1}{15}$, $k = \frac{1}{60}$ en neem $m = 400$ tijdsintervallen. Vul de drie lijsten v , a en n met m nullen. Stel $v(0) = 0.99$, $a(0) = 0.01$ en $n(0) = 0$.

Vul nu de 399 andere getallen in deze drie lijsten aan door gebruik te maken van drie differentievergelijkingen. Gebruik hiervoor een for-lus.

Zet de drie lijsten om in drie grafieken van een verschillende kleur. Doe dit met een `list_plot`. Zorg er voor dat de drie grafieken in hetzelfde assenstelsel getekend zijn.

Tweede deel

Schrijf nu enkele programmaregels om enkel de infectiekromme te tekenen voor verschillende waarden van b , namelijk $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{25}$ en $\frac{1}{30}$. Je tekent deze zes krommen op dezelfde manier als zes perioden van een sinusgrafiek uit de snelcursus. Zorg ervoor dat de zes grafieken in randomkleuren getekend worden.

Derde deel

Bereken voor de zes grafieken uit het vorige deel de sommen van de waarden in de lijst a . Deze som staat voor de totale impact van de infectieziekte. Besluit of deze impact toeneemt, afneemt of constant blijft als de top naar rechts verschuift.

Vierde deel

Voeg voor elke berekening verklarende tekstblokken toe. Deze tekstblokken moeten informatie bevatten die een lezer zonder voorkennis in staat moet stellen om de output van je berekeningen te begrijpen.