Elk natuurlijk getal is het begin van een macht van twee

Antonella Perucca

Wist je dat er een macht van 2 bestaat die in decimale notatie begint met jouw geboortejaar? En met het aantal inwoners van de Benelux? Van deze uitspraken ben ik honderd procent zeker, ook al ken ik je niet, ook al heb ik er geen idee van hoeveel inwoners de Benelux telt. Deze sterke uitspraken zijn het gevolg van een nog sterkere uitspraak: élk natuurlijk getal is in decimale schrijfwijze het begin van een macht van 2.

Beschouwen we bijvoorbeeld het getal 123. De macht 2^{90} is een van de machten van 2 die met 123 begint:

$$2^{90} = 1237940039285380274899124224\,.$$

Maar er zijn er nog vele andere: $2^{379}, 2^{575}, 2^{864}, \ldots$.

In dit artikel tonen we deze straffe stelling aan. Verwacht echter geen rekenkundige formule die je meteen de gepaste exponent oplevert bij een willekeurig gekozen geheel getal. In praktijk zal je na het lezen van dit bewijs nog altijd een hele serie machten van 2 moeten doorlopen om de geschikte exponent te vinden.

Modellering van de stelling

Stel algemeen dat we een macht van 2 willen laten beginnen met het natuurlijke getal A. We zoeken dan een positieve gehele exponent n zo dat er een positief geheel getal k bestaat waarvoor:

$$A \cdot 10^k \leqslant 2^n < (A+1)10^k\,.$$

Deze dubbele ongelijkheid verzekert ons dat de eerste cijfers van 2^n precies die van A zijn. De overige k cijfers van 2^n zijn door deze ongelijkheid niet aan een voorwaarde onderworpen. In het voorbeeld hierboven hadden we:

$$123 \cdot 10^{25} \leqslant 2^{90} < 124 \cdot 10^{25}\,.$$

Merk op dat de rechtse ongelijkheid een strikte ongelijkheid is. Het getal $(A+1)10^k$ begint immers met het getal $A+1$ en niet met A.

De bovenstaande algemene voorwaarde kan herschreven worden door de tiendelige logaritme te nemen van de drie leden van de dubbele ongelijkheid en door welgekende eigenschappen van logaritmen toe te passen:

$$\log(A) + k \leqslant n \cdot \log(2) < \log(A+1) + k\,.$$

Geheel gedeelte en decimaal gedeelte

Voor we verder gaan, voeren we eerst enkele universele notaties in.

Als x een reëel getal is, dan noteren we met $\lfloor x \rfloor$ de floorfunctie of het gehele gedeelte van x. Dit is het grootste gehele getal dat kleiner dan of gelijk is aan x. Zo noteren we bijvoorbeeld: $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 7 \rfloor = 7$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.

Met $\{x\}$ noteren we het decimale gedeelte van x. Hiermee bedoelen we het verschil van x en $\lfloor x \rfloor$. Enkele voorbeelden: $\{\pi\} = 0.14\ldots$; $\{7\} = 0$; $\{-\pi\} = 0.85\ldots$.

Hoe bepalen we k?

Als we de getallen $\log(A)$, $\log(2)$ en $\log(A+1)$ in de bovenstaande ongelijkheid opsplitsen in een geheel en een decimaal gedeelte dan vinden we de volgende ongelijkheden:

$$\lfloor \log(A) \rfloor + \{\log(A)\} + k \leqslant \lfloor n \log(2) \rfloor + \{n \log(2)\}$$

en

$$\lfloor n \cdot \log(2) \rfloor + \{n \log(2)\} < \lfloor \log(A+1) \rfloor + \{\log(A+1)\} + k\,.$$

Alleen in het geval dat $A+1$ een macht van 10 is, hebben $\log(A)$ en $\log(A+1)$ een verschillende floorfunctie. Dit geval laten we hier eventjes weg. We gaan er voor de eenvoud van uit dat $\log(A)$ en $\log(A+1)$ hetzelfde gehele gedeelte hebben.

Stel nu dat er een *voldoende groot* geheel getal n bestaat dat aan deze ongelijkheden beantwoordt, dan kunnen we k op de volgende manier definiëren:

$$k = \lfloor n \cdot \log(2) \rfloor - \lfloor \log(A) \rfloor .$$

Kleine waarden voor n kunnen immers niet altijd garanderen dat k positief is.

Met deze uitdrukking voor k vertaalt de dubbele ongelijkheid zich als:

$$\{\log(A)\} \leqslant \{n \cdot \log(2)\} < \{\log(A+1)\} .$$

Er rest nu enkel nog aan te tonen dat er een voldoende groot natuurlijk getal n bestaat dat hieraan voldoet.

Hoe bepalen we n?

We zetten alles even op een rijtje. Het getal $X = \log(2)$ is een irrationaal getal.

De getallen $a = \{\log(A)\}$ en $b = \{\log(A+1)\}$ voldoen aan de betrekking $0 \leqslant a < b < 1$. De verklaring hiervoor ligt in het feit dat $A > A+1$ en dat de logaritmische functie met grondtal 10 een stijgende functie is. Bovendien hebben $\log(A)$ en $\log(A+1)$ dezelfde floorfunctie.

Het oorspronkelijk probleem kan nu nog korter geformuleerd worden.

> Als een irrationaal getal X gegeven is en twee reële getallen a en b waarvoor geldt dat $0 \leqslant a < b < 1$ dan zijn er oneindig veel natuurlijke getallen n die voldoen aan $a \leqslant \{n \cdot X\} < b$.

Ontknoping van het bewijs

Steunend op de irrationaliteit van X kan je makkelijk nagaan dat de getallen $\{n \cdot X\}$ onderling verschillen voor verschillende waarden van n.

Verdeel het interval $[0,1]$ nu in deelintervallen waarvan de lengte kleiner is dan $b-a$. Intuïtief, maar ook door middel van het duivenhokprincipe, kan je makkelijk aanvoelen dat er een interval is dat minstens twee van deze getallen bevat. Noem ze $\{n_1 \cdot X\}$ en $\{n_2 \cdot X\}$ en veronderstel dat het eerste getal kleiner is dan het tweede. Zo vinden we (zie figuur 9) dat:

$$\{(n_2 - n_1)X\} = \{n_2X - n_1X\} = \{n_2X\} - \{n_1X\} < b - a.$$

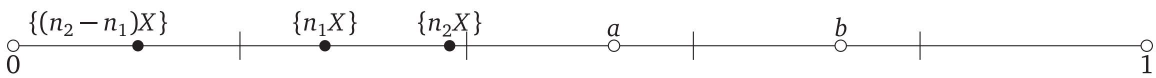
Daarna kunnen we aantonen dat er in elke van de intervallen oneindig veel getallen zitten van de vorm $\{M(n_2-n_1)\cdot X\}$ met M een geheel getal. De opeenvolgende getallen $\{1(n_2-n_1)\cdot X\}, \{2(n_2-n_1)\cdot X\}, \{3(n_2-n_1)\cdot X\}, \ldots$ vormen immers een rekenkundige rij met een verschil dat kleiner is dan $b-a$ totdat de rij getallen groter wordt dan 1. Daarna begint er een nieuwe rekenkundige rij met een verschil dat kleiner is dan $b-a$ totdat de rij getallen groter wordt dan 1, enz. In elk van deze rijen zit een getal van de vorm $\{M(n_2-n_1)\cdot X\}$ tussen de waarden a en b. Als $n_2 - n_1$ nu groter is dan nul, zijn we klaar met het bewijs.

Als $n_2 - n_1$ kleiner is dan nul, moet er een kleine randbedenking gemaakt worden. Omdat $\{M(n_2-n_1)\cdot X\}$ niet nul is, kunnen we overschakelen op een andere rij:

$$\{-M(n_2-n_1)X\} = 1 - \{M(n_2-n_1)X\} .$$

Ook van deze rij zitten er oneindig veel elementen tussen a en b. Omdat $-M(n_2-n_1)$ positief is kunnen we immers een analoge redenering opbouwen als hierboven.

De kleine stukjes van dit bewijs die niet volledig uitgeschreven zijn, vatten we samen in de volgende oefeningen.



Figuur 9 Situatieschets bij de ontknoping van het bewijs

Oefeningen voor de lezer

1. Schrijf het bewijs uit voor het geval waarin $A+1$ een macht van 10 is. Hint: het decimale gedeelte van $\log(A+1)$ is nul.
2. Bewijs dat X rationaal is indien X reëel is en $\{nX\} = \{mX\}$ voor verschillende gehele getallen n and m. Hint: $X = \frac{\lfloor nX \rfloor - \lfloor mX \rfloor}{n-m}$.
3. Kan je de stelling uit dit artikel veralgemenen door het getal 2 te vervangen door een ander natuurlijk getal dat geen macht van 10 is? Merk op dat het met fundamentele algebra kan bewezen worden dat indien de tiendelige logaritme van een natuurlijk getal rationaal is, dit getal een macht van 10 is. M.a.w. tiendelige logaritmen van getallen die geen macht van tien zijn, zijn irrationaal.
4. Geldt deze stelling ook in niet tiendelige talstelsels? M.a.w. is elk geheel getal in het t-tallig stelsel het begin van een macht van 2 in het t-tallig stelsel?

Bronnen

Dit artikel is sterk geïnspireerd door de YouTube-video “Ogni numero è l’inizio di una potenza di 2” van MATH-segnale, `www.youtube.com/mathsegnale`.