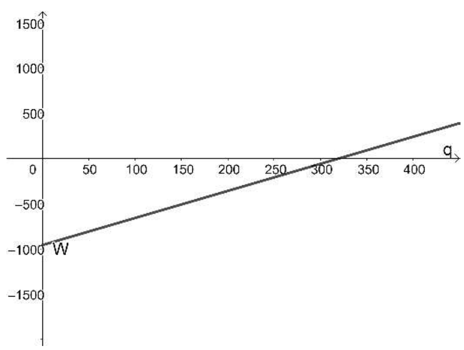
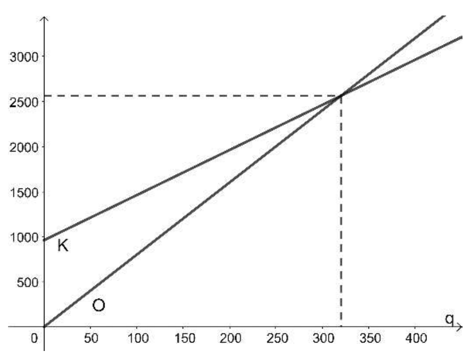
dejaarsklas werk je met een concreet voorbeeld. Wij houden het nu contextloos, maar nemen wel concrete waarden voor de parameters: $b = 960$, $a = 5$ en $c = 8$. We lossen de vraag op twee verschillende manieren grafisch op. Eerst maken we gebruik van de winstfunctie $W = -960 + 3q$: we onderzoeken voor welke waarden de grafiek boven de horizontale as ligt (zie de grafiek in figuur 2). We vinden dat de firma break-even draait (d.w.z. zonder winst of verlies) als $q = 320$ en effectief winst maakt voor grotere waarden van q. Bij de tweede manier onderzoeken we vanaf welke waarde van q de grafiek van de opbrengstenfunctie hoger ligt dan die van de kostenfunctie (zie de grafiek in figuur 3). We lossen dus de ongelijkheid $9q \geq 960 + 5q$ op, zonder eerst alles naar het linkerlid te brengen. Uiteraard vinden we dezelfde uitkomst.



Figuur 2



Figuur 3

We staan tot slot nog even stil bij deze twee manieren van werken, die in principe bij elke vergelijking of ongelijkheid mogelijk zijn. In dit geval liggen ze beide voor de hand. In andere situaties, bijvoorbeeld het zoeken van het evenwicht tussen vraag en aanbod, kun je beter blijven werken met de aparte functies, zonder de vergelijking eerst op 0 te herleiden, omdat het verschil tussen vraag en aanbod geen directe betekenis heeft.

3 Eerstegraadsfuncties als wiskundig model: rechte als trendlijn

Een van de nieuwe eindtermen voor studierichtingen uit de tweede graad met doorstroomfinaliteit (d.w.z. de huidige aso-studierichtingen en een aantal tso/kso-studierichtingen) schrijft voor dat leerlingen het verband tussen twee numerieke grootheden in een dataset moeten kunnen onderzoeken: ze moeten de data in een spreidingsdiagram kunnen voorstellen en ze moeten een gepaste trendlijn kunnen bepalen met behulp van ICT (nog onder voorbehoud, want de nieuwe eindtermen zijn nog niet finaal goedgekeurd). Met de trendlijn wordt de regressielijn bedoeld, die bepaald wordt met de kleinste-kwadraten-methode. Deze eindterm is onder andere van belang in functie van de wetenschapsvakken, waarin leerlingen verbanden moeten kunnen bepalen op basis van experimentele data, maar ook in economie en humane wetenschappen worden trendlijnen frequent gebruikt. Zoals de eindterm geformuleerd is, hoort hij thuis onder de beschrijvende statistiek, maar er is een evidente link naar functies: zo'n trendlijn is de grafiek van een functie. En in deze loep bekijken we natuurlijk hoe we eerstegraadsfuncties in verband kunnen brengen met deze eindterm.

De trendlijn wordt met behulp van ICT bepaald. De meest voor de hand liggende hulpmiddelen zijn dan een grafische rekenmachine en een rekenblad (Excel, LibreOffice Calc, GNumeric, ...). De rekentechnische kant blijft daardoor erg beperkt en komt in deze paragraaf niet expliciet aan bod. Dat biedt de gelegenheid om tijdens de lessen vooral in te zoomen op een aantal meer conceptuele aspecten en dat is wat we in dit deel van de loep uitwerken.

3.1 Een functie als wiskundig model

Tegenwoordig worden leerlingen er al vroeg vertrouwd mee gemaakt dat functies gebruikt worden om fenomenen uit de realiteit te beschrijven. In die toepassingen is de functie in kwestie meestal gegeven, bijvoorbeeld in formulevorm of via een andere representatie die leerlingen dan moeten gebruiken om het voorschrift op te stellen. De eindterm over de trendlijn biedt de gelegenheid om met de leerlingen dieper in te gaan op het zelf zoeken van een geschikte functie: welk type van functie is geschikt en hoe vind je binnen dit type een gepaste functie?

Leerlingen moeten dus zelf een wiskundig model opstellen. Daarbij worden ze er nadrukkelijk mee geconfronteerd dat zo'n wiskundig model altijd een vereenvoudiging is: het is een idealisering die de realiteit slecht bij benadering beschrijft. In het begin kan dat verwarrend zijn voor de leerlingen. Deze manier van werken staat immers haaks op wat we gewoon zijn binnen de zuivere wiskunde. Daar leggen we immers juist de nadruk op exactheid. Daarom is het goed om in de les toch wat tijd uit te trekken om leerlingen vertrouwd te laten worden met deze nieuwe manier van werken. In deze loep werken we dat niet uit omdat we dat al eerder gedaan hebben. We hebben namelijk al eens een loep specifiek gewijd aan modelleren (Deprez, Op de Beeck en Van den Broeck, 2011). Daarin hebben we in detail uitgewerkt hoe je tijdens de les het modelleren kunt introduceren via eerstegraadsfuncties.

In die eerdere loep hebben we de trendlijn op een heel informele manier bepaald: we bepaalden een rechte die de punten in het spreidingsdiagram op het zicht goed weergaf. Ook nu we in het kader van de nieuwe eindterm de trendlijn met ICT zullen bepalen, vinden we het zinvol om in het begin even met deze heel intuïtieve manier te werken. Die laat immers een van de aspecten van het modelleren goed aanvoelen: we mogen het model niet verabsoluteren; elk model is maar één van de vele mogelijke modellen.

3.2 Drie voorbeelden

Goede voorbeelden zijn van groot belang bij het leren van statistiek. We willen data in een zinvolle context waarbinnen het ook zinvol is om een trendlijn te zoeken. Anderzijds zochten we voorbeelden in functie van wat we vanuit wiskundig standpunt wilden uitwerken. Alle voorbeelden in deze paragraaf zijn gebaseerd op data die we vonden op de website 'Data and Story Library', die zich toelegt op het verzamelen van goede voorbeelden voor statistiekonderwijs. Je vindt het adres van deze website in de bibliografie van deze loep. Je vindt nog meer inspiratie in een loep die we lang geleden maakten over regressie (Deprez, Roels en Tytgat, 2005).

Zoals eerder gezegd, gaan we in deze paragraaf niet in op de concrete handelingen die je moet uitvoeren om een spreidingsdiagram te maken en een trendlijn te tekenen, maar richten onze aandacht op het interpreteren van de coëfficiënten en de vraag of de trendlijn zinvol is.

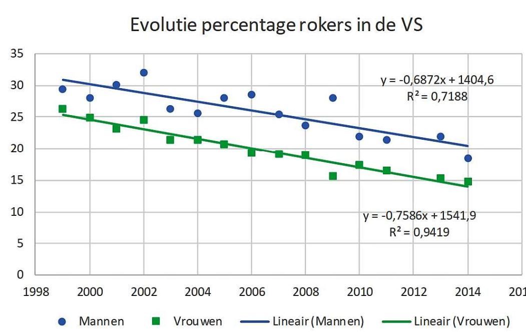
Voorbeeld 1: rokers

De dataset uit de tabel hieronder toont de evolutie van het percentage rokers bij 18-24-jarige mannen en vrouwen in de VS tussen 1999 en 2014. Je vindt de dataset ook in digitale vorm op onze website.

jaar	mannen	vrouwen
1999	29,5	26,3
2000	28,1	24,9
2001	30,2	23,2
2002	32,1	24,5
2003	26,3	21,5
2004	25,6	21,5
2005	28	20,7
2006	28,5	19,3
2007	25,4	19,1
2008	23,6	19
2009	28	15,6
2010	21,9	17,4
2011	21,5	16,5
2013	21,9	15,4
2014	18,5	14,8

Figuur 4 Evolutie van het percentage rokers bij 18-24-jarige mannen en vrouwen in de VS

We laten de leerlingen eerst een spreidingsdiagram maken met daarin beide tijdreeksen. We laten hen ook de bijbehorende trendlijnen bepalen, evenals de waarde van R^2. Het resultaat (met Excel) vind je in figuur 5.



Figuur 5

Merk op dat we hier werken met de determinatiecoëfficiënt R^2 i.p.v. met de correlatiecoëfficiënt. In het geval van een lineaire trendlijn is R^2 gewoon het kwadraat van de correlatiecoëfficiënt. De interpretatie loopt dus gelijk met die van de correlatiecoëfficiënt: hoe dichter R^2 bij 1 ligt, hoe beter de rechte aansluit bij de datapunten. Het voordeel van de determinatiecoëfficiënt is dat hij wel nog gedefinieerd kan worden bij een niet-lineaire trendlijn, maar de correlatiecoëfficiënt niet.

Het maken van het spreidingsdiagram en het opstellen van de trendlijn is niet het einde van de oefening. Integendeel, het belangrijkste werk moet nog komen: de interpretatie van de resultaten. Daarbij passeren allerlei elementen de revue, bijvoorbeeld: de coëfficiënten in de vergelijking van de trendlijn, de waarde van R^2 en het maken van voorspellingen met de trendlijn.

De richtingscoëfficiënt in de trendlijn bij de vrouwen betekent dat het percentage rokers bij hen elk jaar met (afgerond) 0,76 procentpunt afneemt. We gebruiken hier bewust het woord 'procentpunt' i.p.v. 'procent' om verwarring te vermijden: het gaat immers over een absolute afname (je trekt 0,76 af van het percentage), niet over een relatieve afname (waarbij je het percentage zou vermenigvuldigen met $1-\frac{0{,}76}{100}$). De richtingscoëfficiënt in de trendlijn bij de mannen toont dat het percentage rokers bij hen iets trager afneemt dan bij de vrouwen. Omdat het verschil klein is, moet je al goed kijken om dat op de grafiek te kunnen aflezen.

Met de vergelijking van de trendlijnen kun je nu ook voorspellingen maken (of terugrekenen in de tijd). Sommige van die voorspellingen zijn zinvol (bijvoorbeeld: wanneer je mag verwachten dat het aantal rokers bij mannen en vrouwen onder de 10% gezakt zal zijn), maar als je te ver in de toekomst (of in het verleden) kijkt, moet je je afvragen of de daling uit de dataset wel aangehouden zal kunnen worden. Het is dus wel duidelijk dat de constante term in de vergelijking van de trendlijnen in dit geval geen concrete betekenis heeft. Het zou een argument kunnen zijn om de tijd anders weer te geven, bijvoorbeeld met een tijdschaal die start in 1999.

We merken dat de waarde van R^2 bij de vrouwen een stuk groter is dan die bij de mannen. Dat is in overeenstemming met wat we in het spreidingsdiagram zien: de datapunten bij de vrouwen sluiten veel beter aan bij de rechte dan de datapunten bij de mannen.

Je moet zeker nog meer rechttoe-rechtaan-voorbeelden zoals dit behandelen, waarbij de trendlijn een goede beschrijving geeft van de datapunten en waarbij je de coëfficiënten van de trendlijn laat interpreteren, een voorspelling laat maken... Mits wat zoeken vind je hiervoor goede data en contexten. De volgende twee voorbeelden liggen wat minder voor de hand: eerst laten we zien dat een rechte trendlijn niet altijd een goede beschrijving van de datapunten geeft, en vervolgens geven we een voorbeeld waarin een rechte trendlijn tegen de verwachtingen in toch zinvol is.

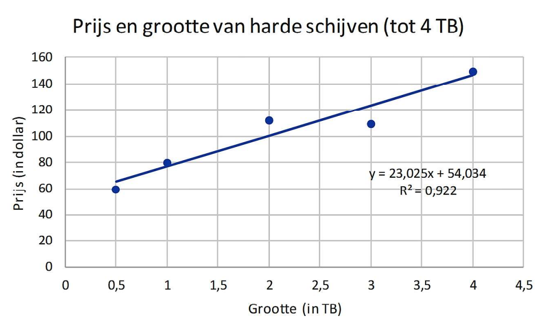
Voorbeeld 2: prijzen van externe harde schijven

De dataset uit de volgende tabel toont de grootte en de prijs van een aantal externe harde schijven, zoals genoteerd op Amazon.com in 2016.

grootte (in TB)	prijs (in dollar)
0,5	59,99
1	79,99
2	111,97
3	109,99
4	149,99
6	423,34
8	596,11
12	1079,99
32	4461,00

Figuur 6 Grootte en prijs van externe harde schijven bij Amazon.com in 2016

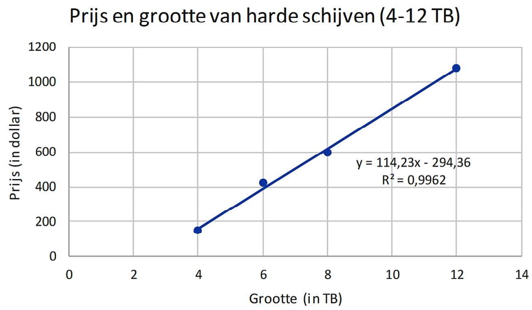
We laten de leerlingen eerst het spreidingsdiagram maken en de trendlijn bepalen van de externe harde schijven tot en met 4 TB (zie figuur 7). We krijgen een goed bruikbare trendlijn, die laat zien dat elke extra TB aanleiding geeft tot een bijkomende kostprijs van (afgerond) 23 dollar.



Figuur 7

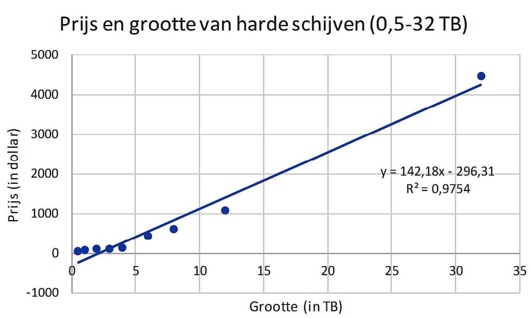
Ook voor de harde schijven van 4 t.e.m. 12 TB krijgen we een goed bruikbare trendlijn, maar in deze categorie van grootte betaal je (afgerond) 114 dollar per bijkomende TB (zie figuur 8).

Wil je de grootste harde schijf die te koop is, dan moet je voor de extra terabytes nog meer investeren: met de gegevens in de tabel kun je nagaan dat de sprong van 12 naar 32 TB een bijkomende kost van (afgerond) 169 dollar per TB met zich meebrengt.



Figuur 8

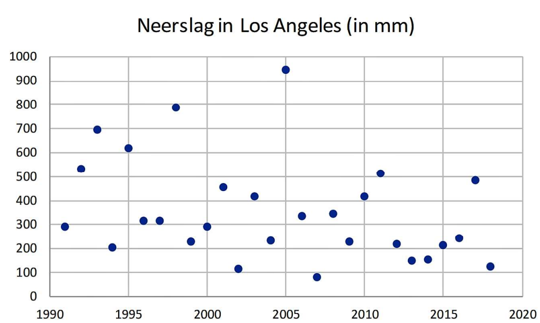
Op basis van het voorgaande valt te verwachten dat de we geen trendlijn zullen vinden die de volledige dataset goed weergeeft. Figuur 9 bevestigt dit, ook al heeft R^2 een waarde die dicht bij 1 ligt.



Figuur 9

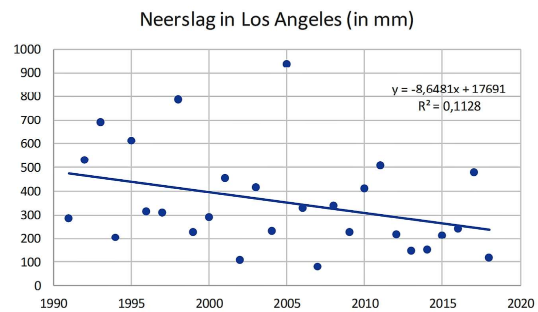
Voorbeeld 3: regenval in Los Angeles

Figuur 10 toont de evolutie van de jaarlijkse hoeveelheid neerslag (in mm) in Los Angeles (we geven de data zelf hier niet, maar je vindt ze wel op onze website).



Figuur 10

Het is wel duidelijk dat er heel wat variatie in de neerslaghoeveelheden zit en dat de datapunten zeker niet allemaal dicht bij eenzelfde rechte liggen. De waarde voor R^2 zal zeker niet dicht bij 1 liggen. Toch levert de trendlijn hier interessante informatie, zoals figuur 11 duidelijk maakt: ze laat ons vermoeden dat er doorheen alle variatie misschien toch wel een dalende trend aanwezig is.

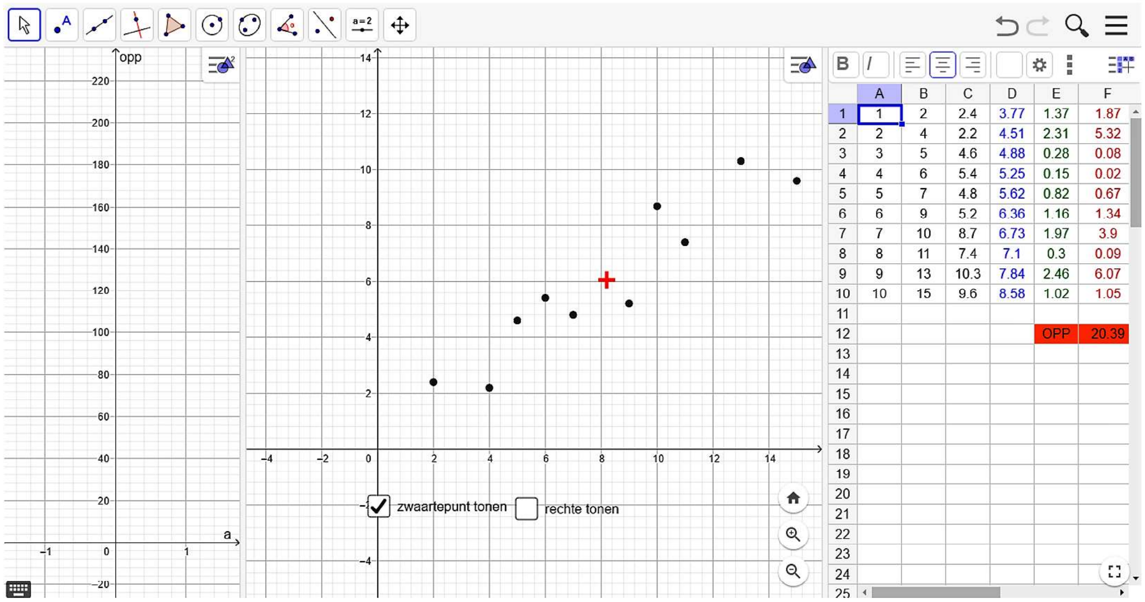


Figuur 11

3.3 Hoe wordt de trendlijn bepaald?

De trendlijn uit de eindterm is de regressielijn die bepaald wordt via de kleinste-kwadraten-methode. In het kader van de eindterm hoef je op deze methode niet in te gaan en blijft het bepalen van de regressielijn dus een black box. Daar is niets op tegen. Ook het berekenen van een vierkantswortel met de rekenmachine, om maar iets te noemen, blijft voor de leerlingen een black box, zonder dat we ons daar zorgen over maken. En we hopen je er ondertussen ook van overtuigd te hebben dat er best wel interessante, wiskundige zaken te doen zijn rond de trendlijn zonder daarom te weten hoe die precies bepaald wordt. Een volledige afleiding van de kleinste-kwadraten-methode, met alles erop en eraan, overstijgt trouwens de leerstof uit het secundair onderwijs, bijvoorbeeld omdat er gebruik gemaakt wordt van functies van meerdere veranderlijken.

Hoewel het dus niet per se hoeft, en het niet in zijn volledigheid kan, zijn er toch interessante mogelijkheden om een tip van de sluier op te lichten in de tweede graad van het secundair onderwijs. Dat is wat we in deze paragraaf willen tonen. We hebben hiervoor een GeoGebra-applet uitgewerkt.



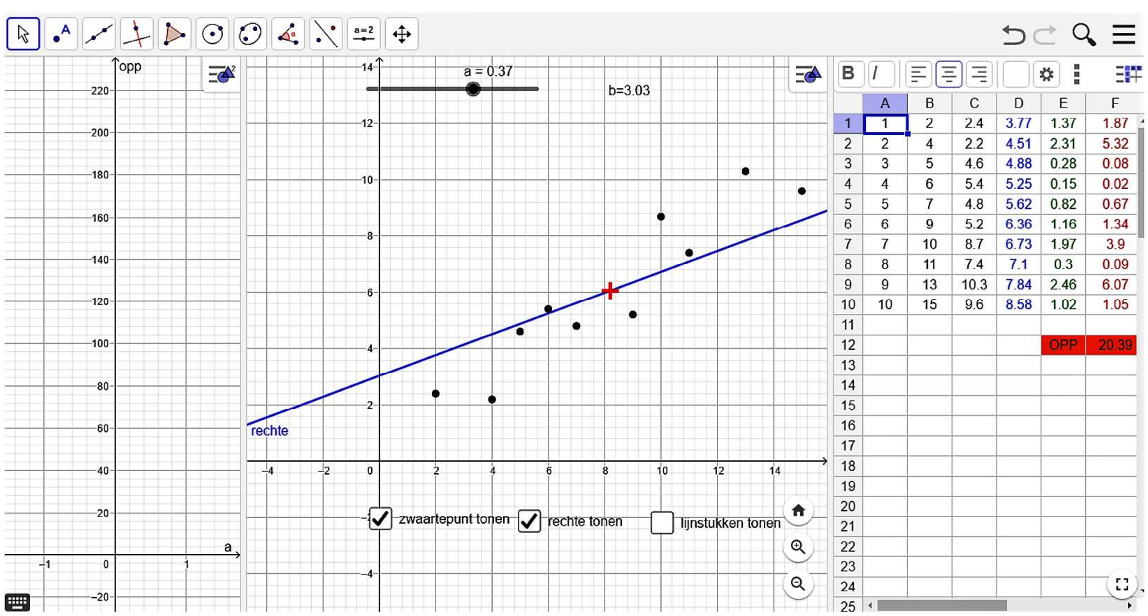
Figuur 12

De rechte

Als je het vakje 'rechte tonen' aanvinkt, krijg je een rechte te zien die door het zwaartepunt gaat (zie figuur 13). Er is ook een schuifknop waarmee je de waarde van a kunt instellen. De eerstegraadsfunctie die overeenkomt met de getekende rechte heeft dus als vergelijking $f(x) = y_M + a(x - x_M)$, waarbij (x_M, y_M) het zwaartepunt is en a de waarde die met de schuifbalk vastgelegd is. Het is duidelijk dat de waarde van b bepaald is eens de waarde van a gekozen is.

De GeoGebra-applet: de data en een vereenvoudiging

De data waar we in de GeoGebra-applet mee werken, vind je in kolommen B en C van het (rekenblad)venster aan de rechterkant (zie figuur 12). Het spreidingsdiagram vind je in het middelste (teken)venster. In het linkse (teken)venster zie je voorlopig niets.



Figuur 13

Een eerstegraadsfunctie wordt bepaald door twee parameters: de coëfficiënten a en b in het voorschrift $f(x) = ax + b$. Je kunt die twee parameters echter eenvoudig reduceren tot één parameter als je bereid bent te steunen op een eenvoudige eigenschap van de trendlijn die we hier niet bewijzen: de trendlijn gaat door het 'zwaartepunt' van de puntenwolk (zie het rode kruis in figuur 12; de kleur zie je in de gedrukte versie van dit artikel niet, maar wel in de digitale versie van het artikel op onze website en in de applet zelf). De x-coördinaat van dat zwaartepunt is het gemiddelde x_M van de x-waarden uit de dataset en zijn y-coördinaat is het gemiddelde y_M van de y-waarden van de dataset. In de applet maken we gebruik van deze vereenvoudiging. Op het einde van deze paragraaf komen we nog even terug op deze vereenvoudiging.

Met wat je nu in de applet ziet, kun je al proberen om een geschikte waarde voor a te vinden. Er is natuurlijk geen rechte die exact door alle datapunten gaat. Je probeert dus een rechte te vinden die zo goed mogelijk bij de punten aansluit, waarbij de beoordeling voorlopig puur visueel gebeurt.

De kleinste-kwadraten-methode gevisualiseerd

De kleinste-kwadraten-methode geeft een getalsmatig beoordelingscriterium voor het bepalen van de waarde van a:

- er wordt (op een welbepaalde manier, die we hieronder zullen uitleggen) een getal berekend dat meet hoe sterk de rechte van de punten afwijkt;
- dat getal hangt af van de waarde van a;
- voor a kiezen we dan de waarde waarvoor dit getal zo klein mogelijk is.

We werken dit hieronder stap voor stap uit aan de hand van de applet.

We starten met het aanvinken van het vakje 'lijnstukken tonen', waardoor er in de applet lijnstukjes getoond worden die de datapunten verticaal verbinden met de rechte (zie figuur 14). Hoe langer deze lijnstukjes zijn, hoe meer de rechte afwijkt van de datapunten. We bekijken daarom hoe je hun lengte kunt bepalen. De lengte van zo'n verticaal lijnstukje is de absolute waarde van het verschil tussen de y-coördinaten van zijn twee randpunten. Het ene randpunt is het datapunt, waarvan de y-coördinaat gegeven is (zie kolom C in het rekenblad). De y-coördinaat van het andere randpunt is niet onmiddellijk gegeven, maar zijn x-coördinaat is gelijk aan die van het datapunt. Omdat dit andere randpunt bovendien op de rechte ligt, is zijn y-coördinaat dan gelijk aan de functiewaarde van deze x-coördinaat volgens de bijbehorende eerstegraadsfunctie (dus gelijk aan $f(x_i) = y_M + a(x_i - x_M)$, waarin x_i de x-waarde van de het i-de datapunt is en a de waarde die met de schuifbalk vastgelegd is). Je vindt deze y-waarden ook terug in het rekenblad: zie kolom D. De lengte van de groene lijnstukjes vind je in kolom E. We kunnen de betekenis van de lengte van zo'n lijnstukje nu preciezer als volgt omschrijven: ze geeft aan hoe sterk de y-waarde volgens de rechte afwijkt van de y-waarde van het datapunt.

We vinken nu het vakje 'vierkanten tonen' aan. Aan elk lijnstukje is nu een vierkant gehecht en onderaan in de figuur wordt de totale oppervlakte van al deze figuren getoond. Ook in het rekenblad wordt de oppervlakte berekend: in kolom F vind je de kwadraten van de getallen uit kolom E. Deze getallen geven dus de oppervlaktes van de vierkanten. Onderaan vind je de som van al die getallen, d.w.z. de totale oppervlakte van alle vierkanten.

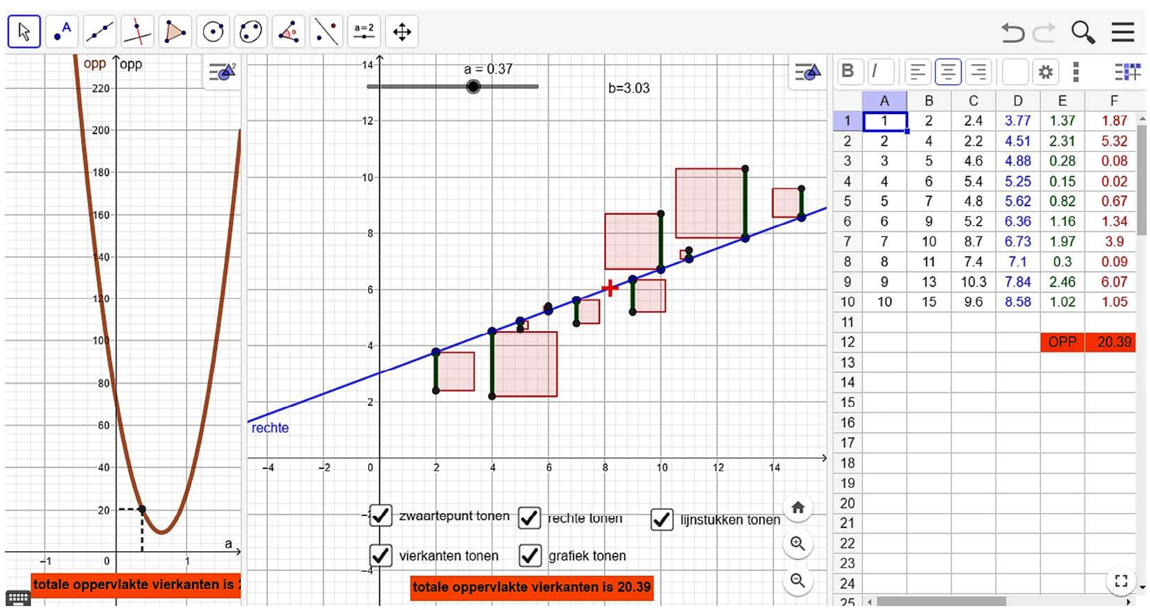
Welke betekenis kunnen we aan deze totale oppervlakte hechten? We kennen reeds de betekenis van de lengte van een groen lijnstukje: hoe langer het lijnstuk, hoe groter de afwijking tussen de y-waarde volgens de rechte en de y-waarde van het datapunt. De overgang naar het vierkant betekent dat we deze lengte kwadrateren. In het totaal wegen grote afwijkingen daardoor sterker door dan kleine afwijkingen. We besluiten dat de totale oppervlakte van alle vierkanten een maat is voor de 'totale afwijking' tussen de rechte en de datapunten. Daarom is het deze totale oppervlakte van de vierkanten die we zo klein mogelijk proberen te maken.

Met wat je nu in de applet ziet, kun je nu opnieuw proberen om een geschikte waarde voor a te vinden. Probeer hierbij nu dus de totale oppervlakte zo klein mogelijk te maken.

Figuur 14

Een parabool

Vink tot slot het vakje 'grafiek tonen' aan. In het linkse venster zie je nu een parabool (zie figuur 15). Deze parabool toont hoe de totale oppervlakte van de vierkanten (uitgezet op de verticale as) samenhangt met de waarde van a (uitgezet op de horizontale as). Dit geeft meer inzicht bij het zoeken naar de optimale waarde van a. Het komt er dus blijkbaar op aan om het eerste coördinaatgetal van de top van de parabool te bepalen!



Figuur 15

We hebben hiermee natuurlijk nog niet verklaard waarom de grafiek een parabool is. Voor een kleine en concrete dataset kun je dat misschien nog met de leerlingen doen, maar de algemene redenering is in de tweede graad wellicht een brug te ver. Voor de volledigheid geven we ze hier wel, voor een algemene dataset, maar dus wel vertrekkend van de eigenschap dat de regressierechte door het zwaartepunt van de dataset gaat. Als je alles bijeenbrengt wat we hierboven besproken hebben, vind je (geformuleerd voor een dataset met n punten):

$$\begin{aligned}\text{opp} &= (y_1 - f(x_1))^2 + \ldots + (y_n - f(x_n))^2 \\ &= (y_1 - (y_M + a(x_1 - x_M)))^2 + \ldots \\ &\qquad + (y_n - (y_M + a(x_n - x_M)))^2 \\ &= ((y_1 - y_M) - a(x_1 - x_M))^2 + \ldots \\ &\qquad + ((y_n - y_M) - a(x_n - x_M))^2 \\ &= A \cdot a^2 + B \cdot a + C\end{aligned}$$

met

$$\begin{aligned}A &= (x_1 - x_M)^2 + \ldots + (x_n - x_M)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_M)^2, \\ B &= -2 \cdot \Big((x_1 - x_M)(y_1 - y_M) + \ldots \\ &\qquad + (x_n - x_M)(y_n - y_M) \Big) \\ &= -2 \sum_{i=1}^{n} (x_1 - x_M)(y_1 - y_M) \quad \text{en} \\ C &= (y_1 - y_M)^2 + \ldots + (y_n - y_M)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_M)^2.\end{aligned}$$

Nu we zo ver geraakt zijn, kunnen we het natuurlijk niet laten om ook de formule voor de optimale waarde van a af te leiden:

$$\begin{aligned}a &= -\frac{B}{2A} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_1 - x_M)(y_1 - y_M)}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_M)^2} \\ &= \frac{\text{cov}(x,y)}{\text{var}(x,y)}.\end{aligned}$$

De parameter b kan (zoals voorheen) eenvoudig bepaald worden via $b = y_M - a x_M$.

Terug naar onze vereenvoudiging

De gedachtegang die we hierboven ontwikkeld hebben, steunt op de eigenschap dat de regressierechte door het zwaartepunt van de datapunten gaat. Op de GeoGebra-website vind je tal van applets die de kleinste-kwadraten-methode visualiseren met vierkanten zonder gebruik te maken van deze vereenvoudiging. Je vindt dan twee schuifbalken, een voor a en een voor b. De eerste stappen uit de opbouw die we hierboven geschetst hebben, kun je met deze applets ook doen. De laatste stap, de overgang naar de parabool, kun je dan echter niet meer zetten. De totale oppervlakte van de vierkanten hangt nu immers af van twee variabelen: zowel a als b. De grafiek is nu een oppervlak in de driedimensionale ruimte (meer bepaald: een elliptische paraboloïde, als grafiek van een tweedegraadsfunctie van twee variabelen). Het bepalen van de optimale waarde van a en b via de grafiek wordt hierdoor in de praktijk ondoenbaar. Wat in deze algemene situatie wel kan, is het bepalen van de optimale waarde via een tabel. Op onze website vind je een rekenblad waarin dit uitgewerkt is: in een 2-dimensionale tabel wordt de totale oppervlakte van de vierkanten getoond als functie van a en b en worden de optimale waarden aangeduid.

4 Eigenschappen van afgeleiden voorbereiden

De afgeleide van een functie in een punt is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in dat punt en die raaklijn is een lineaire benadering van de functie. Het is daarom voor de hand liggend en zinvol om sommige eigenschappen van afgeleiden in te leiden met eerstegraadsfuncties. Leerlingen krijgen op die manier meer intuïtie voor die eigenschappen. We illustreren dit met twee voorbeelden.

4.1 Samenstellen van eerstegraadsfuncties

In de volgende korte lesactiviteit onderzoeken de leerlingen de samengestelde van twee eerstegraadsfuncties. Dit is een voorafspiegeling van de kettingregel voor het bepalen van de afgeleide van de samengestelde van twee functies.

Als f afleidbaar is in x en g afleidbaar in $u = f(x)$, met $y = g(u) = h(x)$, dan is $h = g \circ f$ afleidbaar in x en geldt:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

of nog

$$h'(x) = g'(u) \cdot f'(x).$$