Bewijs dat de methode Jefferson en de methode D'Hondt aan elkaar gelijk zijn

Filip Moons

16 februari 2024

Lemma 1. *Elke prijs d die n zetels verdeelt onder p partijen ($d \in \mathbb{Q}, n, p \in \mathbb{N}$), levert dezelfde zetelverdeling $a_1, \ldots a_p$ (met $\forall i : a_i \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{p} a_i = n$) op onder de methode Jefferson.*

Bewijs. Stel dat er een prijs d' bestaat die n zetels op een andere manier $a'_1, \ldots a'_p$ verdeelt. Dan bestaat er partijen x waarvoor geldt:

$$a'_x = \left\lfloor \frac{s_x}{d'} \right\rfloor \neq a_x.$$

Als d' kleiner is dan d, dan geldt voor alle partijen dat $\frac{s_i}{d'} > \frac{s_i}{d}$, dus de enige optie voor de partijen x is dat ze zetels bijwinnen: $a'_x > a_x$, maar dat is onmogelijk vermits er geen partijen bestaan die een zetel kunnen verliezen, bijgevolg $\sum_{i=1}^{p} a'_i > n$.

Als d' groter is dan d, dan geldt voor alle partijen dat $\frac{s_i}{d'} < \frac{s_i}{d}$, dus de enige optie voor de partijen x is dat ze zetels verliezen, maar dat is onmogelijk vermits er geen partijen zijn die een zetel kunnen bijwinnen, bijgevolg $\sum_{i=1}^{p} a'_i < n$. ☐

Stelling 2. *Stel dat p partijen hebben deelgenomen aan de verkiezingen. Er zijn n zetels te verdelen in het parlement ($p, n \in \mathbb{N}$) en $s_1, \ldots, s_p$ is het aantal stemmen dat elke partij gehaald heeft (met $\forall i : s_i \in \mathbb{N}$). Het aantal zetels dat elke partij krijgt $a_1, \ldots, a_p$ (met $\forall i : a_i \in \mathbb{N}$ en $\sum_{i=1}^{p} a_i = n$) is gelijk onder de methode Jefferson en de methode D'Hondt.*

Bewijs. Per inductie op het aantal parlementszetels n.

$\boxed{n = 1}$

Stel, zonder de algemeenheid te schaden, dat partij x ($x \in \{1, \ldots, p\}$) het grootste aantal stemmen heeft. Dan geldt:

$$s_x > s_i \quad \forall i \neq x$$

- **Methode D'Hondt**: Het grootste quotiënt is $s_x/1 > s_i$, bijgevolg $a_x = 1, a_i = 0$ ($\forall i \neq x$).

- **Methode Jefferson**: een goede prijs per zetel is s_x, dit zal exact 1 zetel toekennen aan partij x en geen aan de andere partijen:

$$a_x = \left\lfloor \frac{s_x}{s_x} \right\rfloor = 1,$$
$$a_i = \left\lfloor \frac{s_i}{s_x} \right\rfloor = 0, \text{want } s_i < s_x, \forall i \neq x$$

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$

Gegeven: Het aantal zetels dat elke partij krijgt $a_1, \ldots, a_p$ met $\sum_{i=1}^{p} a_i = n$ is gelijk onder de methode Jefferson en de methode D'Hondt.

Te bewijzen: Het aantal zetels dat elke partij krijgt $a'_1, \ldots, a'_p$ met $\sum_{i=1}^{p} a'_i = n+1$ is gelijk onder de methode Jefferson en de methode D'Hondt.

Bewijs: Stel, zonder de algemeenheid te schaden, dat partij y ($y \in \{1, \ldots, p\}$) de partij is die bij deling van zijn aantal stemmen s_y door $a_y + 1$ (het aantal zetels uit het gegeven plus één), een groter aantal stemmen/zetel kan voorleggen dan alle andere partijen, dan geldt er:

$$\frac{s_y}{a_y+1} > \frac{s_i}{a_i+1} \Leftrightarrow \frac{a_i+1}{s_i} > \frac{a_y+1}{s_y} \quad \forall i \neq y, \tag{1}$$

Uit het gegeven kunnen we ook stellen dat, zonder de algemeenheid te schaden, partij z, de n-de zetel binnenhaalde (z niet noodzakelijk verschillend van y en $z \in \{1, \ldots, p\}$). Dan weten we ook via de methode D'Hondt uit het gegeven dat:

$$\frac{s_z}{a_z} > \frac{s_y}{a_y+1} \Leftrightarrow \frac{a_y+1}{s_y} > \frac{a_z}{s_z} \tag{2}$$

- **Methode D'Hondt**: De methode D'Hondt zal de $n+1$ grootste quotiënten op een rij zetten. Dat verandert de volgorde van de n eerste quotiënten niet. Bijgevolg is $a'_i = a_i$ ($\forall i \neq y$). Partij y heeft het grootste $n+1$-de quotiënt en haalt een extra zetel binnen: $a'_y = a_y + 1$.
- **Methode Jefferson**: een goede prijs per zetel is $\frac{s_y}{a_y+1}$, wat resulteert in:

$$a'_y = \left\lfloor \frac{s_y}{\frac{s_y}{a_y+1}} \right\rfloor = \left\lfloor s_y \frac{a_y+1}{s_y} \right\rfloor = a_y + 1,$$

  voor de overige partijen i geldt dat $a'_i = \left\lfloor s_i \frac{a_y+1}{s_y} \right\rfloor$, we moeten dus aantonen dat $\left\lfloor s_i \frac{a_y+1}{s_y} \right\rfloor = a_i$, of nog:

$$a_i \leq s_i \frac{a_y+1}{s_y} < a_i + 1,$$

– We weten dat $a_i = \left\lfloor s_i \frac{a_z}{s_z} \right\rfloor$, dus geldt ook de ongelijkheid $a_i \leq s_i \frac{a_z}{s_z} < a_i + 1$, bijgevolg kunnen we uit de uitdrukking in (2) besluiten:

$$\begin{aligned} s_i \frac{a_y + 1}{s_y} &> s_i \frac{a_z}{s_z} \\ &\geq a_i. \end{aligned}$$

– Om aan te tonen dat $s_i \frac{a_y+1}{s_y} < a_i + 1$, kunnen we de uitdrukking in (1) gebruiken:

$$\begin{aligned} s_i \frac{a_y + 1}{s_y} &< s_i \frac{a_i + 1}{s_i} \\ &= a_i + 1. \end{aligned}$$

□